

# ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SANTANDER



**Apuntes de**

**Cálculo de Estructuras**

(Tomados según las explicaciones de Avelino Samartín)

VII - VIII

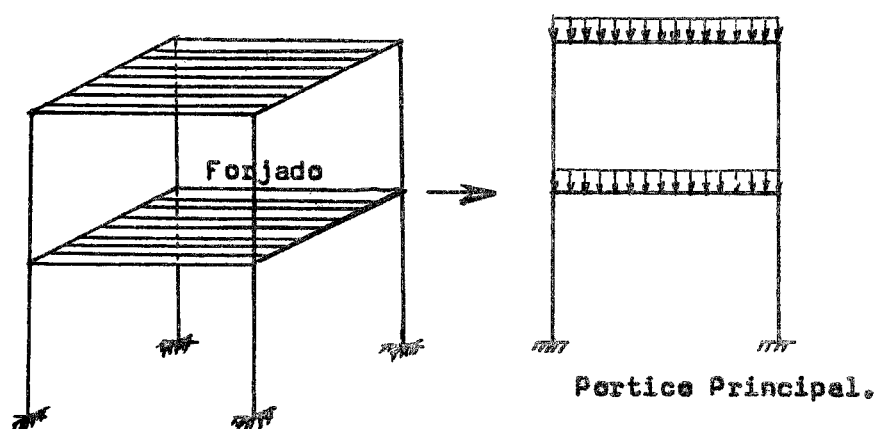


## VII-INTRODUCCION AL CALCULO DE ESTRUCTURAS RETICULADAS.

### VII.1.-CONSIDERACIONES PREVIAS.

Denominamos estructuras reticulares a aquellas en las que el ángulo relativo entre barras permanece constante, es decir existe la RIGIDEZ DEL NUDO. En cuanto a las barras pueden ser rectas o curvas, con momentos flectores o sin ellos.

Un tipo particular de estructuras reticulares son las estructuras de edificación, las cuales constan de una serie de porticos principales unidos horizontalmente por los forjados. Se suelen estudiar estas estructuras tomando cada portico principal por separado, y suponiendo  $(E\Omega)^{-1} = 0$  (es decir la elongabilidad nula), ya aunque en edificaciones es relativamente cierto, a veces ha dado disgustos.



Hagamos ahora una distinción importante dentro de las estructuras reticuladas:

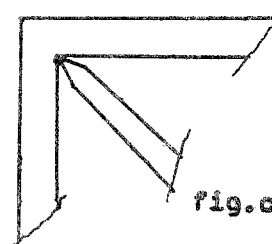
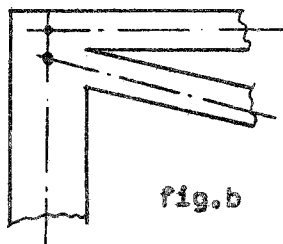
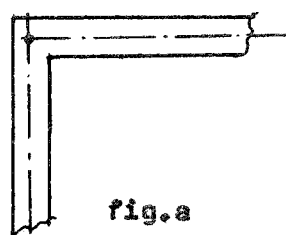
-I N T R A S L A C I O N A L E S, los nudos no se mueven. Por ejemplo: estructuras trianguladas.

-T R A S L A C I O N A L E S, los nudos se mueven, lo cual no obliga a que se alargen las barras.

El calculo de las intraslacionales es mucho más sencillo que el de las traslacionales por lo que se suele tender a las primeras, por ejemplo:

- si la estructura está apoyada en un muro importante,
- si la estructura es triangulada,
- si la caja del ascensor es importante, etc.

En las estructuras que estudiamos supondremos que las líneas medias de las vigas que concurren en el nudo al cual van (fig a); si no ocurre así, no lo estudiamos (fig b); también estudiaremos el caso de una viga articulada en un nudo (fig c).

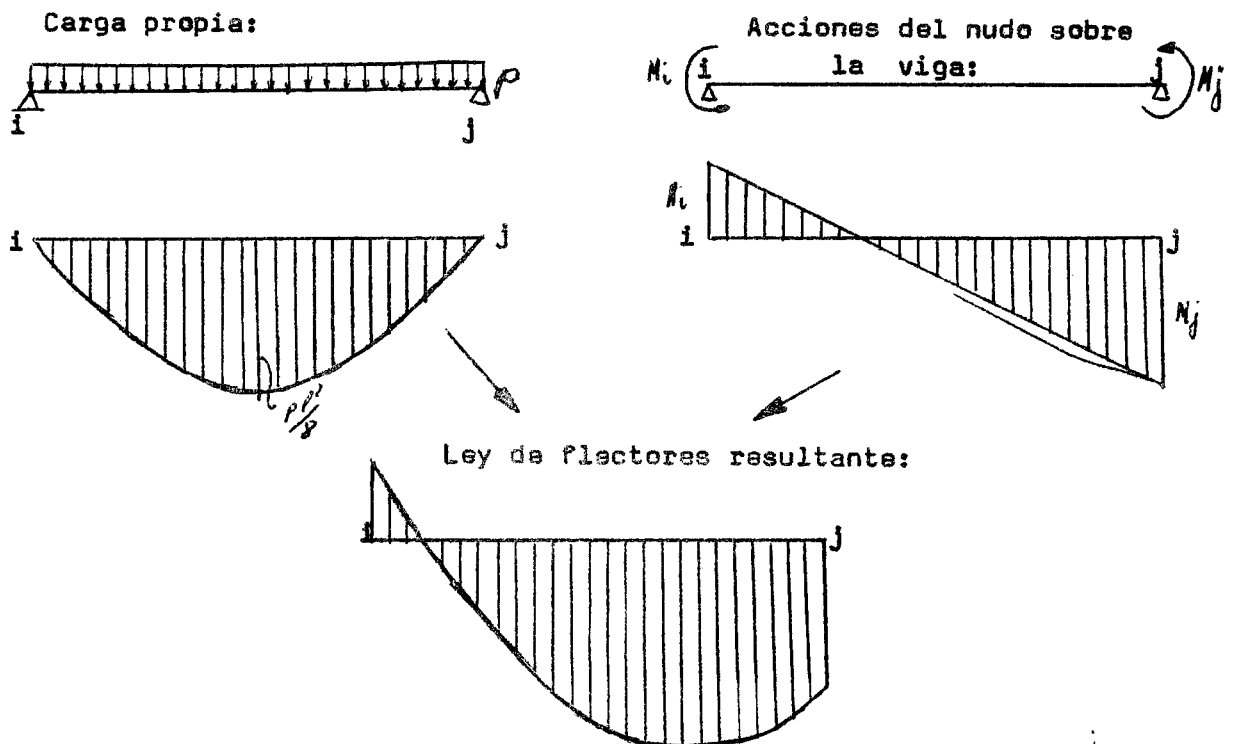


## VII.2.-PASOS A SEGUIR EN LA RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA RETICULADA.

Los metodos que vamos a estudiar solo nos dan las acciones ( y de las acciones solo los momentos) del nudo sobre la barra, ya a partir de ellas tenemos que hallar los esfuerzos (recordemos que esfuerzo es el conjunto de dos fuerzas actuando una sobre la cara dorsal y otra sobre la frontal de una rebanada) en la barra

### 1.-L E Y DE F L E C T O R E S ( $\mu$ ).

Hay que superponer a la ley de flectores originada por las acciones del nudo sobre la barra, la debida a las cargas propias de la misma. Ejemplo:

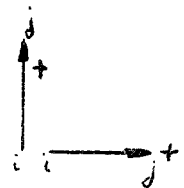


Convenios de signos:

-Tomamos como sentidos de avance positivos estos:

-Como momentos flectores positivos:

-Como momento positivo:



Es decir, dado el momento exterior, para hallar el momento flector, si es por la cara frontal cambiamos el signo:

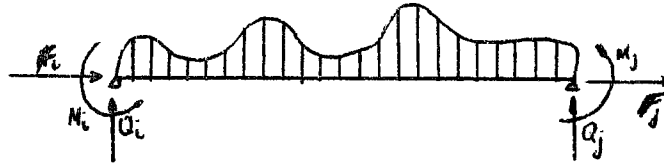
$$\mu_i = -M_i$$

y si es por la dorsal le mantenemos:

$$\mu_j = M_j$$

## 2.-L E Y D E C O R T A N T E S, ( q ).



Se establece mediante el equilibrio de la viga:



Convenio de signos:

-Tomamos como reacciones (Q) positivas:

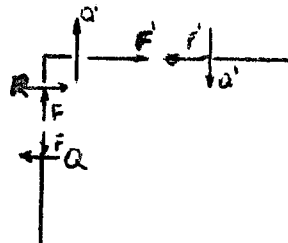


-Como cortantes positivos:  , 

Es decir que en la cara frontal:  $q_i = -Q_i$   
y en la dorsal:  $q_j = Q_j$ .



## 3.-L E Y D E A X I L E S (N).

Se establece mediante el equilibrio de los nudos, una vez conocidos los  $Q_i$ :



Convenio de signos:

-Como fuerza (F) positiva:  , 

-Como axil positivo:  ,  (tracción).

Es decir que en los frontales:  $N_i = -F_i$   
y las dorsales:  $N_j = F_j$ .

NOTA: Si la estructura es intraslacional, no se pueden determinar todos los axiles;

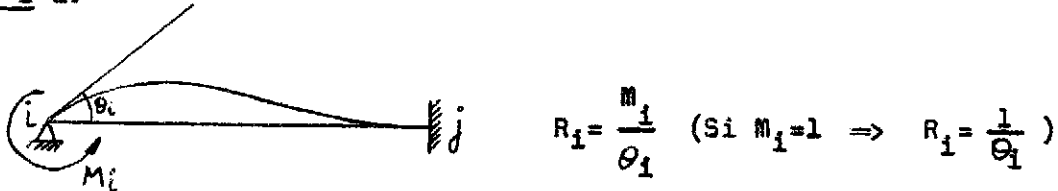
VII.3.-CONCEPTO DE RIGIDEZ Y DE FACTOR DE TRASMISIÓN.

La RIGIDEZ, a la inversa de la flexibilidad, que relacionaba las deformaciones con los esfuerzos que producian, relaciona un esfuerzo con el movimiento que produce.

Lo que veamos a continuación parecerá un tanto artificioso, sin embargo no lo es tanto puesto que por un lado estamos estudiando estructuras de nudos fijos y por otro, cuando veamos el metodo de CROSS veremos que el procedimiento que se sigue es ir empotrando y soltando sucesivamente, por iteración, los nudos de la estructura.

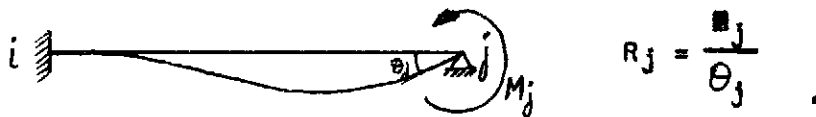
El calculo de las rigidezes y de los factores de transmisión es uno de los pasos previos a la aplicación de los metodos de calculo de estructuras reticuladas.

Por definición: se llama RIGIDEZ ( $R_i$ ) de una barra i-j en el nudo i a:



Es decir, cogemos la viga y la empotramos en j, la apoyamos en i aplicando en este extremo un momento  $M_i$ , la relación entre el momento y el giro  $\theta_i$  que produce en dicho apoyo es  $R_i$ .

Analogamente se define  $R_j$ :

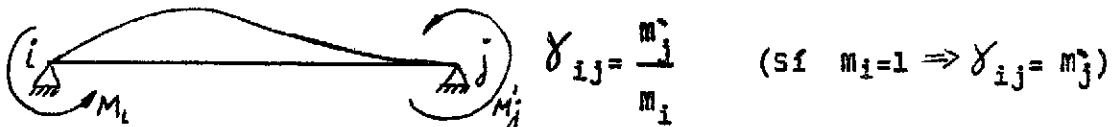


$R$  tiene dimensiones de momento.

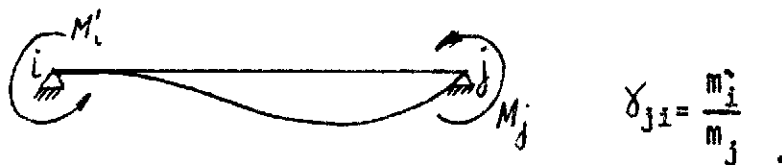
Al calcular  $R$  aparece siempre como expresión de la forma  $R = k \frac{EI}{L}$

( $k$ = constante,  $E$ =modulo de elasticidad de la pieza,  $I$ = momento de inercia,  $L$ = longitud de la pieza), por lo que algunos autores llaman rigidez a  $EI/L$  y FACTOR DE RIGIDEZ a  $k$ .

Cuando hallamos  $R_i$ , en j tendremos un momento de empotramiento perfecto  $M_j'$ . Se llama FACTOR DE TRANSMISIÓN del nudo i al j en la barra i-j a:



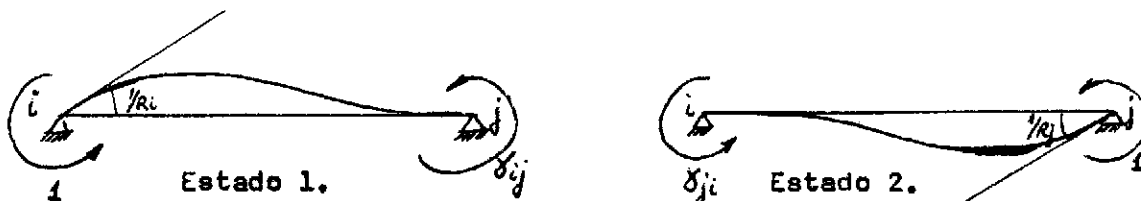
Analogamente definimos:



$\gamma$  es adimensional.

### VII.3.1.-Relación entre las rigidezes y los factores de transmisión de una viga i-j.

Consideremos los dos estados siguientes en la misma viga i-j:



Aplicando el teorema de Maxwell:

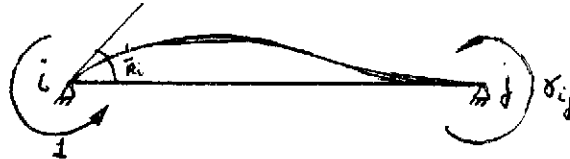
$$1.0 + \gamma_{ij} \frac{1}{R_j} = \gamma_{ji} \frac{1}{R_i} + 1.0$$

de donde:  $\gamma_{ij} \cdot R_i = \gamma_{ji} \cdot R_j$   
=====

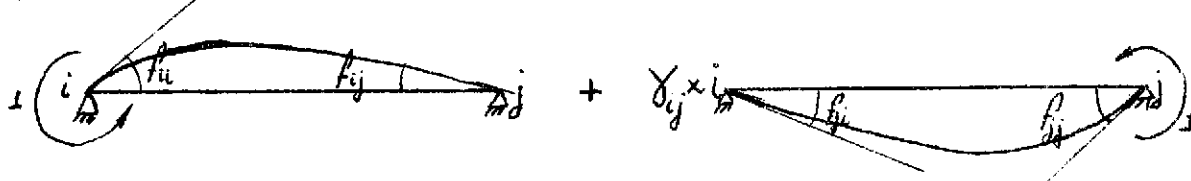
### VII.3.2.-Cálculo de la rigidez y del coeficiente de transmisión.

Vamos a representar por  $f_{ij}$  el giro de una barra  $i-j$  en el extremo  $j$  producido por un momento unidad en  $i$ .

Consideremos ahora este estado:



y descompongámosle en la suma de estos otros dos:



Y estableciendo la equivalencia tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_i} &= f_{ii} - f_{ji} \cdot \delta_{ij} \\ f_{ij} - f_{jj} \cdot \delta_{ij} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (Trabajando con los } f \text{ es valor absoluto)}$$

de aquí sacamos:  $\delta_{ij} = \frac{f_{ji}}{f_{jj}}$

$$y \quad \frac{1}{R_i} = f_{ii} - f_{ji} \frac{f_{ji}}{f_{jj}} = \frac{f_{ii} \cdot f_{jj} - f_{ji} \cdot f_{ji}}{f_{jj}}$$

de donde:

$$R_i = \frac{f_{jj}}{\begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj} \end{vmatrix}} = \frac{f_{jj}}{f_{ii}f_{jj} - f_{ji}^2}$$

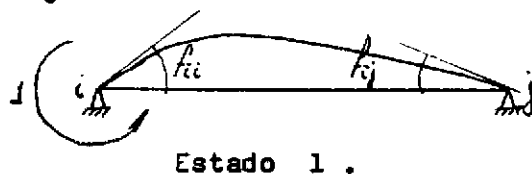
y por simetría circular:

$$\delta_{ji} = \frac{f_{ji}}{f_{ii}}$$

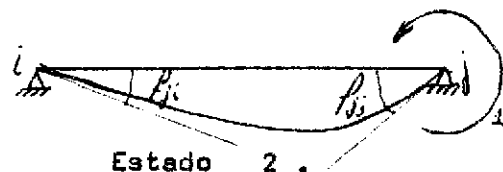
$$R_j = \frac{f_{ii}}{\begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj} \end{vmatrix}} = \frac{f_{ii}}{f_{ii}f_{jj} - f_{ji}^2}$$

### VII.3.3. Forma de calcular los $f_{ij}$ .

PROPIEDAD: Sean los dos estados siguientes en la misma viga  $i-j$ :



Estado 1 .



Estado 2 .

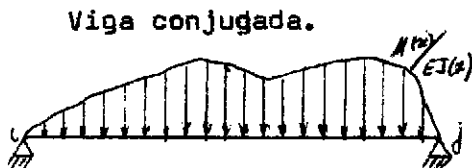
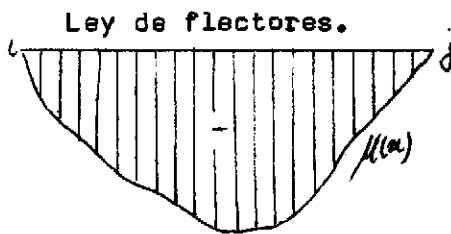
A plicandoles el teorema de Maxwell:

$$1.f_{ji} = 1.f_{ij} \quad (\text{donde las } f \text{ llevan su signo})$$

luego:

$$f_{ji} = f_{ij}$$

### VII.3.3.1.-Cálculo de las $f_{ij}$ mediante los teoremas de Mohr.



Dada una viga i-j, sometida a una ley de cargas  $p(x)$ , tendrá una determinada ley de flectores  $M(x)$ . A dicha viga sometida a una ley de carga:

$$\frac{M(x)}{E.I(x)}$$

se denomina viga conjugada de la dada.

Los teoremas de MOHR dicen:

—La ley de flectores de la viga conjugada coincide con la ley de flechas en la viga real.

—La ley de cortantes de la viga conjugada coincide con la ley de giros en la viga real.

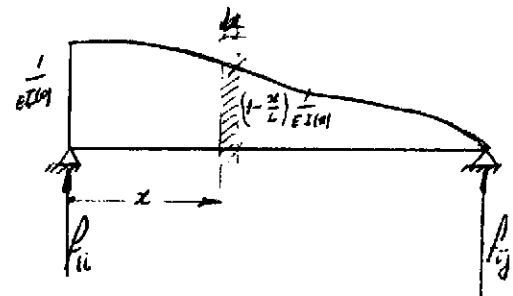
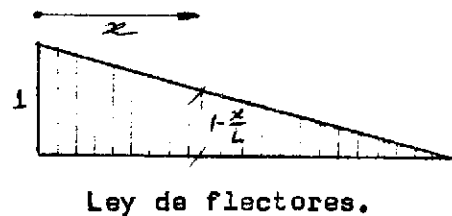
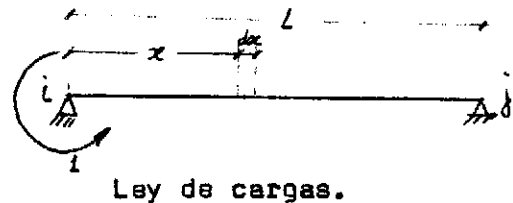
Por tanto:

$$f_{ii} = \frac{1}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{1}{E.I(x)} dx (L-x) =$$

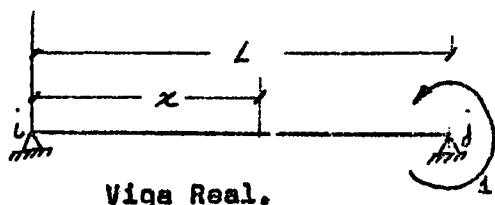
$$= \int_0^L \frac{1}{E.I(x)} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx \quad [1]$$

$$f_{ij} = \frac{1}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{1}{E.I(x)} dx \cdot x =$$

$$= \int_0^L \frac{1}{E.I(x)} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \quad [2]$$

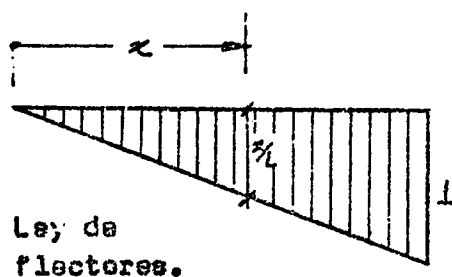






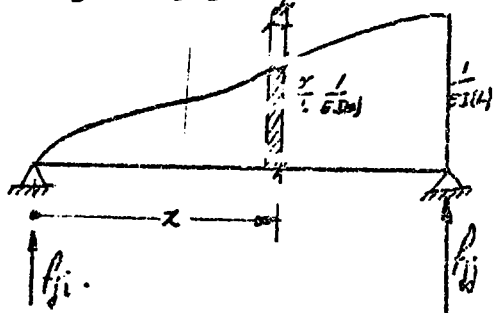
$$f_{ji} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{x}{L} \frac{1}{E \cdot I(x)} dx \quad (x=L) =$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{x}{L} \frac{1}{E \cdot I(x)} (1 - \frac{x}{L}) dx \quad (2)$$



(Donde comprobamos que  $f_{ij} = f_{ji}$ , como demostramos en VII.3.3).

Viga conjugada.



$$f_{jj} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{x}{L} x dx =$$

$$= \int_0^L \frac{x}{L} \frac{1}{E \cdot I(x)} dx \quad (3)$$

La resolución de estas integrales,

las, (1), (2), (3), se puede hacer:

a).-Directamente, no es lo más corriente.

b).-Por el método de GAUSS.

$$I = \int_0^L F(x) \cdot dx =$$

$$= F(x_1) \cdot W_1 + F(x_2) \cdot W_2 + F(x_3) \cdot W_3$$

donde las  $x_i$  son tres posiciones en las que el error resulta mínimo al sustituir la integral por la expresión anterior, y las  $W_i$  es un peso, ya calculado.

c).-Dividiendo la viga, por ejemplo, en 20 partes, establecemos el siguiente cuadro de valores:

$\frac{x}{L}$	$1 - \frac{x}{L}$	$(x/L)^2$	$(1 - (x/L))^2$	$\frac{x}{L}(1 - \frac{x}{L})$	$\frac{1}{E \cdot I(x)}$	(1) · (4)	(2) · (4)	(3) · (4)
0,05								
0,10								
0,15								
⋮		(1)	(2)	(3)	(4)			
0,95								

$$\sum: \quad S_3 \quad S_1 \quad S_2$$

(Cuya razón de existencia se comprende fácilmente teniendo en cuenta la definición de integral).

Luego:

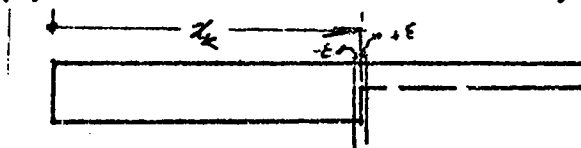
$$r_{11} = S_1 \cdot \frac{L}{20}$$

$$r_{1j} = r_{ji} = S_2 \cdot \frac{L}{20}$$

$$r_{jj} = S_3 \cdot \frac{L}{20}$$

donde  $L/20$  es el incremento de  $x$  tomado, que por ser constante sale factor común y la tenemos en cuenta al final.

Si  $I(x)$  no fuese una función continua, por ejemplo:



habría que tomar un  $\frac{1}{E \cdot I(x_k - \epsilon)}$  y un  $\frac{1}{E \cdot I(x_k + \epsilon)}$ . En este caso en el cuadro habría que añadir una columna con  $\epsilon^2 \Delta x$ , ya que ha dejado de ser constante.

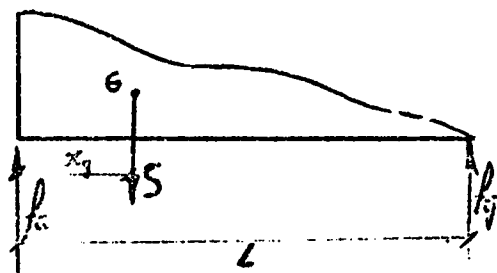
$\frac{x}{L}$	$\Delta x$	$1 - \frac{x}{L}$	$(\frac{x}{L})^2$	$(1 - \frac{x}{L})^2$	$\frac{x}{L}(1 - \frac{x}{L})$	$\frac{1}{E \cdot I(x)}$	1.4.0	0.2.4	0.3.4
	(0)		(1)	(2)	(3)	(4)			

$$\sum: r_{jj} \quad r_{11} \quad r_{1j}$$

Y por ultimo, si los intervalos son muy grandes, conviene cojer las  $I(x)$  en los centros de gravedad de las figuras resultantes.

d).-Si conocemos el area y la posición del centro de gravedad de la viga conjugada, no es necesario plantear las integrales /1/, /2/, /3/.

Por ejemplo:

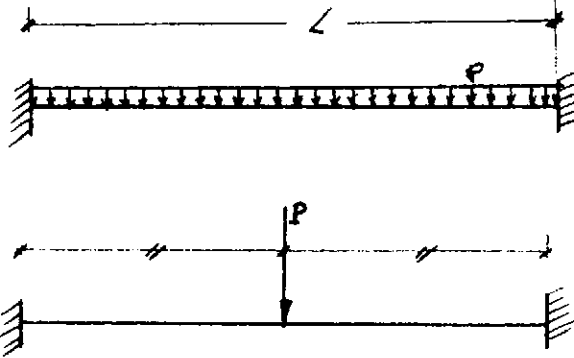


$$L \cdot r_{11} = S \cdot (L - x_g) \Rightarrow r_{11} = S \left(1 - \frac{x_g}{L}\right)$$

$$r_{1j} \cdot L = S \cdot x_g \Rightarrow r_{1j} = S \frac{x_g}{L}$$

#### VII.4.-DETERMINACIÓN DE LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO RIGIDO ( $\hat{M}$ ).

Si los casos de carga son:



sabemos que:

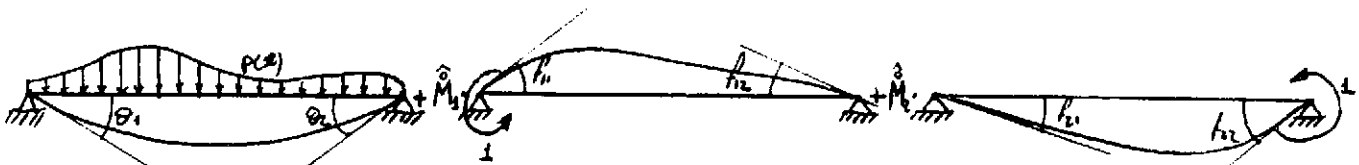
$$\hat{M} = pL^2/12 \quad \text{en el primer caso y}$$

$$\hat{M} = PL/8 \quad \text{en el segundo.}$$

En otro caso, tal como este:



descomponemos en tres estados:



(donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  las calculamos mediante los teoremas de Mohr, y las  $f_{ij}$  acabamos de ver como se calculan).

Como el giro en los extremos de la viga es nulo, se cumple:

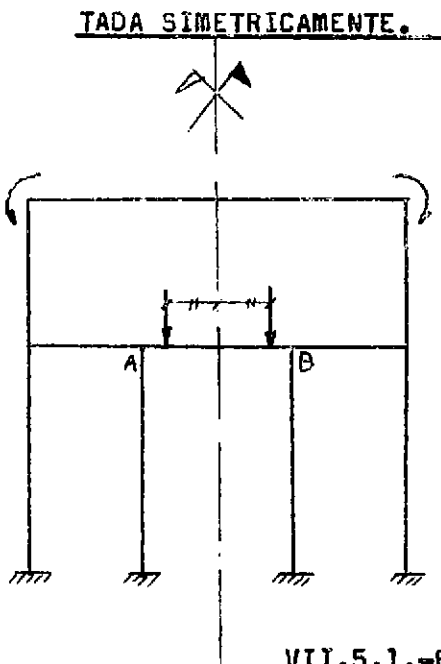
$$\left. \begin{aligned} -\theta_1 + f_{11} \cdot \hat{M}_1 - f_{21} \cdot \hat{M}_2 &= 0 \\ \theta_2 - f_{12} \cdot \hat{M}_1 + f_{22} \cdot \hat{M}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(Si estamos trabajando con valores absolu-} \\ \text{tos llevando en cuenta su significado fí-} \\ \text{sico).} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 + f_{11} \cdot \hat{M}_1 + f_{21} \cdot \hat{M}_2 &= 0 \\ \theta_2 + f_{12} \cdot \hat{M}_1 + f_{22} \cdot \hat{M}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(Si hemos fijado unos sentidos como positi-} \\ \text{vos y a partir de ellos trabajamos inclu-} \\ \text{yendo en cada valor su signo).} \end{array}$$

sistema de donde podemos sacar  $\hat{M}_1$  y  $\hat{M}_2$ .

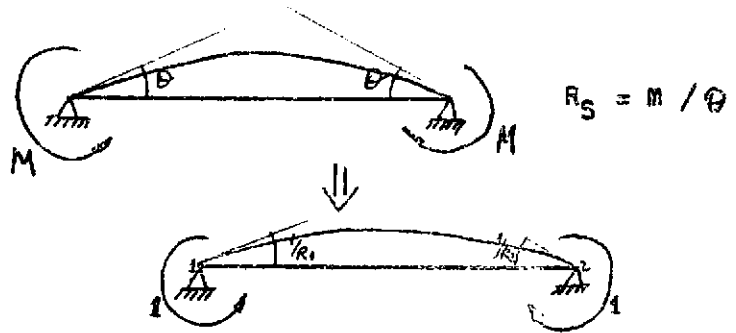
NOTA: El trabajar de una forma o de otra (lo que acabamos de ver al plantear el sistema) tiene sus ventajas y sus inconvenientes. Hay autores que siguen un camino y otros otro. Para el que empiece a estudiar estas materias lo mejor sería realizar los dos caminos, e ir comparando.

### VII.5.-COEFICIENTE DE RIGIDEZ DE UNA PIEZA SIMETRICA SOLICITADA SIMETRICAMENTE.



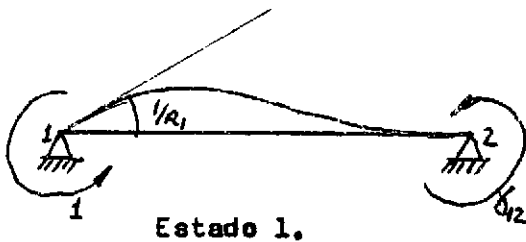
Por ejemplo la viga A-B de la figura de la izquierda.

Definimos la rigidez de una pieza simétrica como:



#### VII.5.1.-Relación entre la rigidez de una pieza simétrica y su rigidez y su coeficiente de transmisión.

Sean los dos estados siguientes:

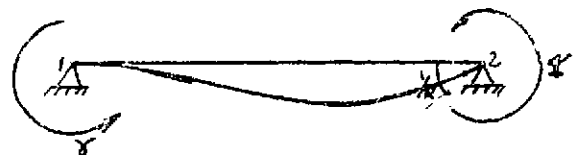
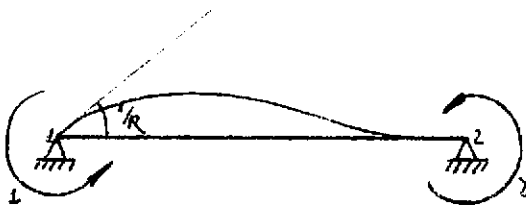


Por ser la pieza simétrica:

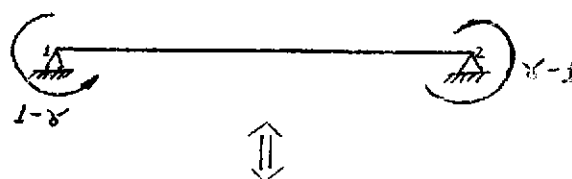
$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$

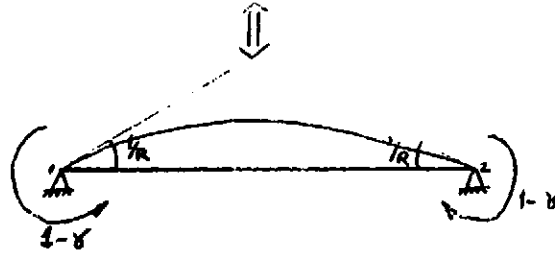
$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$$

luego los dos estados anteriores los podemos escribir:



Restándolos:





Luego:

$$R_S = \frac{1-\delta}{\frac{1}{R}} = R(1-\delta) \quad (1)$$

y teniendo en cuenta las expresiones de  $R$  y  $\delta$  en función de las  $f$  (VII.3.2):

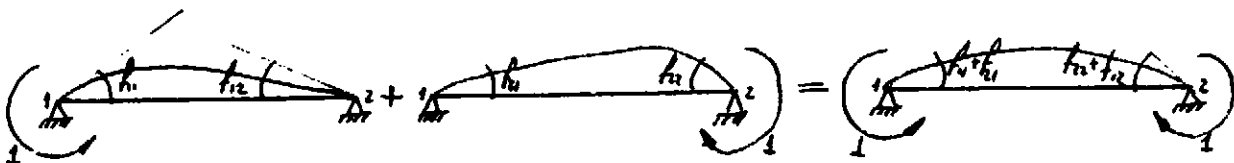
(En este caso  $f_{11}=f_{22}$ ; y siempre  $f_{12}=f_{21}$ , como vimos en VII.3.3)

$$R_S = \frac{f_{11}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}} \left(1 - \frac{f_{12}}{f_{11}}\right) = \frac{f_{11} - f_{12}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}} = \frac{f_{11} - f_{12}}{f_{11}^2 - f_{12}^2} = \frac{1}{\frac{f_{11} + f_{12}}{f_{11} - f_{12}}} \quad (2)$$

#### VII.5.1.1. Cálculo de $R_S$ .

a) Podemos calcular  $R$  y  $\delta$  y luego  $R_S$  mediante la expresión (1) de VII.5.1.

b) Directamente:



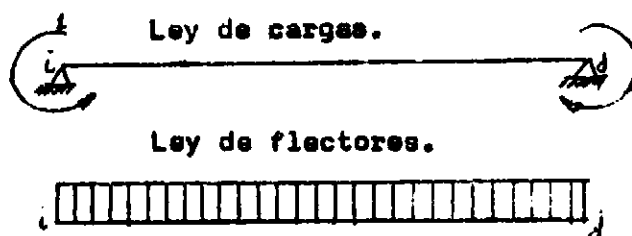
(Estamos trabajando con los  $f$  en valor absoluto).

Luego:

$$R_S = \frac{1}{f_{11} + f_{21}} = \frac{1}{f_{22} + f_{12}}$$

expresión (2), a la que ya habíamos llegado en VII.5.1.

c) Mediante los teoremas de Mohr:

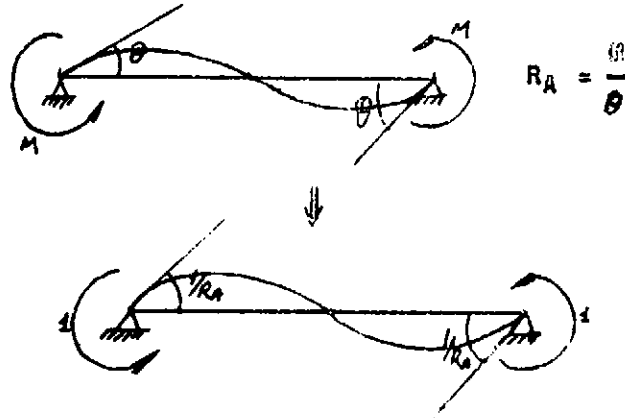
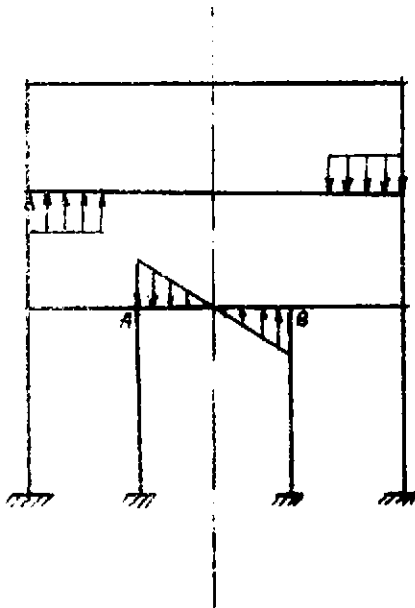


En una pieza prismática  $\delta=0,5$ , luego  $R_S=0,5 \cdot R$

### VII.6.-RIGIDEZ DE UNA PIEZA SIMETRICA SOLICITADA ANTISIMETRICAMENTE.

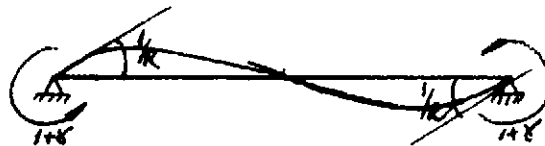
Por ejemplo la viga A-B de la figura de la izquierda.

Definimos la rigidez de una pieza simétrica solicitada antisimétricamente como:



#### VII.6.1.-Relación entre la rigidez de una pieza simétrica solicitada antisimétricamente, su rigidez y su coeficiente de transmisión.

Sumando los dos estados que aparecen en el apartado VII.5.1, tenemos:



Luego:

$$R_A = \frac{1 + \delta}{\frac{1}{R}} = R (1 + \delta) \quad (3)$$

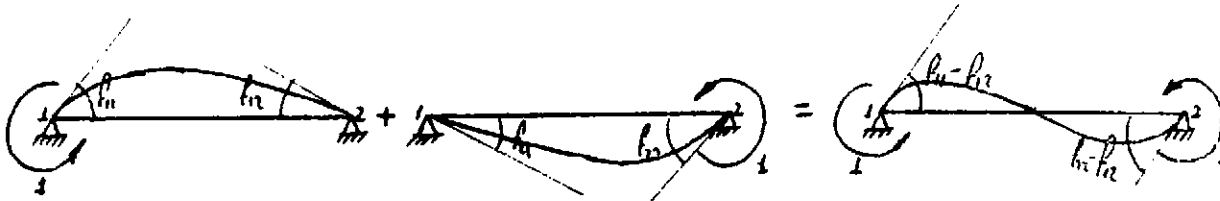
y haciendo las mismas consideraciones que en el mencionado apartado tenemos:

$$R_A = \frac{f_{11}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}} \left( 1 + \frac{f_{12}}{f_{11}} \right) = \frac{f_{11} + f_{12}}{f_{11}^2 - f_{12}^2} = \frac{1}{f_{11} - f_{12}} \quad (4)$$

#### VII.6.1.1.-Cálculo de $R_A$ .

a) Podemos calcular  $R$  y  $\delta$  y luego  $R_A$  mediante la expresión (3) de VII.6.1.

b) Directamente:



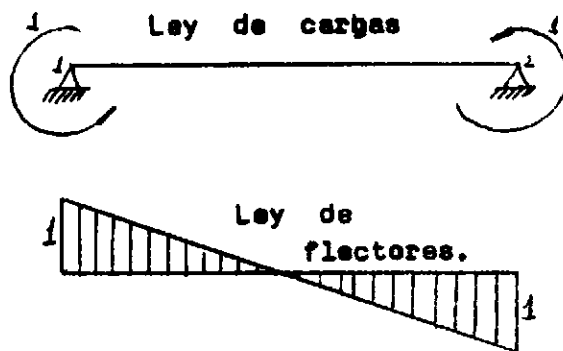
(Trabajamos con las  $f$  en valor absoluto)

Luego:

$$R_A = \frac{1}{f_{11} - f_{21}} = \frac{1}{f_{22} - f_{12}} \quad \text{expresión (4)}$$

la que ya habíamos llegado en VII.6.1.

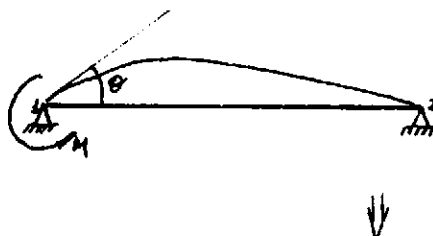
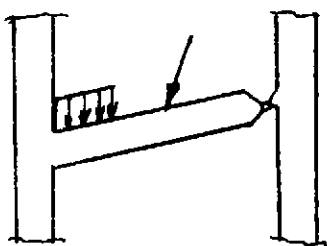
c) Mediante los teoremas de Mohr, aunque en este caso pueda resultar más complicado que en el caso de la pieza solicitada simétricamente.



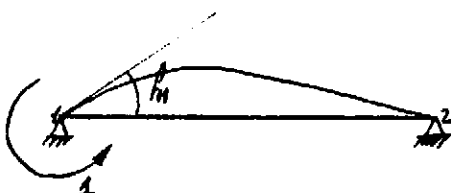
En una viga de pieza prismática:  $R_A = 1,5 R$ .

### VII.7.-RIGIDEZ DE UNA PIEZA ARTICULADA EN UN EXTREMO Y EMPOTRADA EN EL OTRO.

Definimos la rigidez de una pieza empotrada en un extremo y articulada en el otro como:



$$R_{EA1} = \frac{M}{\theta}$$



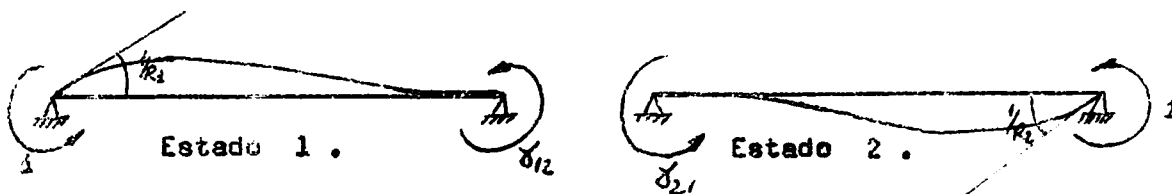
$$R_{EA1} = \frac{1}{f_{11}}$$

Análogamente se define para el otro extremo:

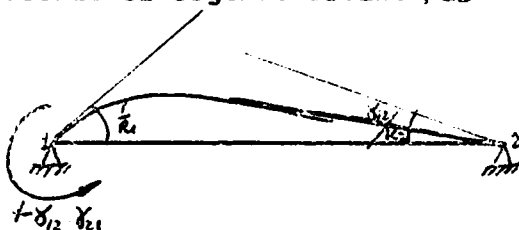
$$R_{EA2} = \frac{1}{f_{22}}$$

VII.7.1.-Relaciones entre la rigidez de una pieza empotrada en un extremo y articulada en el otro y sus rigideces y coeficientes de torsión.

Sean los dos estados siguientes:



Multiplicando el segundo estado por  $\delta_{12}$  y sumando:



de donde:

$$R_{EA1} = \frac{1 - \delta_{12} \cdot \delta_{21}}{\frac{1}{R_1}} = R_1 (1 - \delta_{12} \cdot \delta_{21})$$

Y análogamente para el otro extremo obtendríamos:

$$R_{EA2} = R_2 (1 - \delta_{21} \cdot \delta_{12})$$

Si la pieza es simétrica:

$$R_{EA} = R (1 - \delta^2)$$

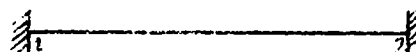
y si es de sección prismática:

$$R_{EA} = 0,75 R$$

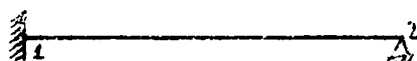
VII.7.2.-Otras relaciones.

A) Supongamos conocidos en una viga 1-2:

$$\hat{M}_1, R_1, \delta_{12}, \hat{M}_2, R_2, \delta_{21}.$$



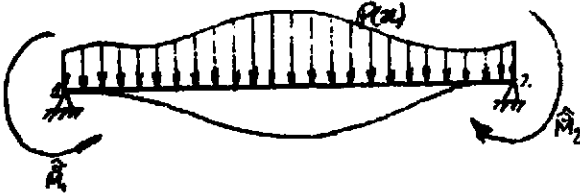
y queremos hallar:  $\hat{M}_{EA1}$  y  $R_{EA1}$  en función de aquellos.



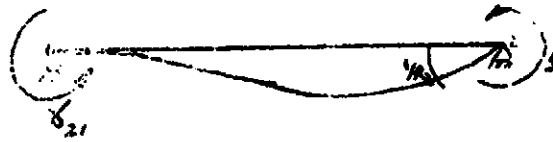


Consideremos los dos estados siguientes:

Estado 1 .



Estado 2 .



Multiplicando el estado 2 por  $\hat{M}_2$  y sumando:



de donde:

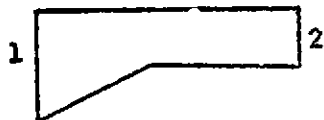
$$\hat{M}_{EA1} = \hat{M}_1 + \gamma_{21} \hat{M}_2$$

y en el apartado VII.7.1, vimos:

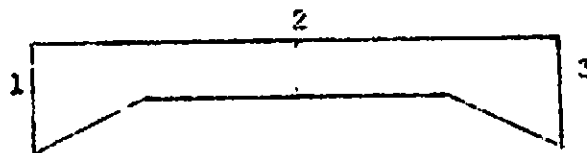
$$R_{EA1} = R_1 (1 - \gamma_{21} \gamma_{12}) .$$

Análogamente se obtendría para el otro extremo de la viga.

B) De una viga (1-2), tal como la de la figura se conocen sus coeficientes de rigidez ( $R_1$ ,  $R_2$ ) y sus factores de transmisión ( $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{21}$ ).



Hallamos su imagen sobre un espejo plano vertical situado en 2, y queremos averiguar el coeficiente de rigidez ( $\rho = \rho_1 = \rho_3$ ) y el factor de transmisión ( $\rho = \rho_{13} = \rho_{31}$ ) de la viga resultante (1-3).



$$\left. \begin{array}{l} \text{De VII.5.1: } \rho_S = \rho(1-\Gamma) \\ \text{De VII.6.1: } \rho_A = \rho(1+\Gamma) \end{array} \right\} \quad \frac{\rho_S}{\rho_A} = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}$$

de donde:

$$\Gamma = \frac{\rho_A - \rho_S}{\rho_S + \rho_A} \quad (1)$$

$$\text{y } \rho = \frac{1}{2} (\rho_S + \rho_A) \quad (2)$$

Hallamos pues  $\rho_A$  y  $\rho_S$  en función de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{21}$ , para lo cual vamos a calcular primero  $f_{12}=f_{21}$  en la viga de la figura en función de  $R_1, R_2$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{21}$ :

$$f_{12} = \frac{1}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} \left\{ \left[ \text{Diagram of beam with unit load at support 1 and fixed support at support 2, with displacement } \gamma_{12} \text{ at support 1} \right] + \gamma_{12} \cdot \left[ \text{Diagram of beam with unit load at support 2 and fixed support at support 1, with displacement } \gamma_{21} \text{ at support 2} \right] \right\}$$

$$f_{11} = \frac{1}{R_1} \frac{1}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} \quad (3) \quad (\text{Ver VII.7.1})$$

$$f_{12} = \frac{\gamma_{12}}{R_2 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21})} \quad (4)$$

y por simetría circular:

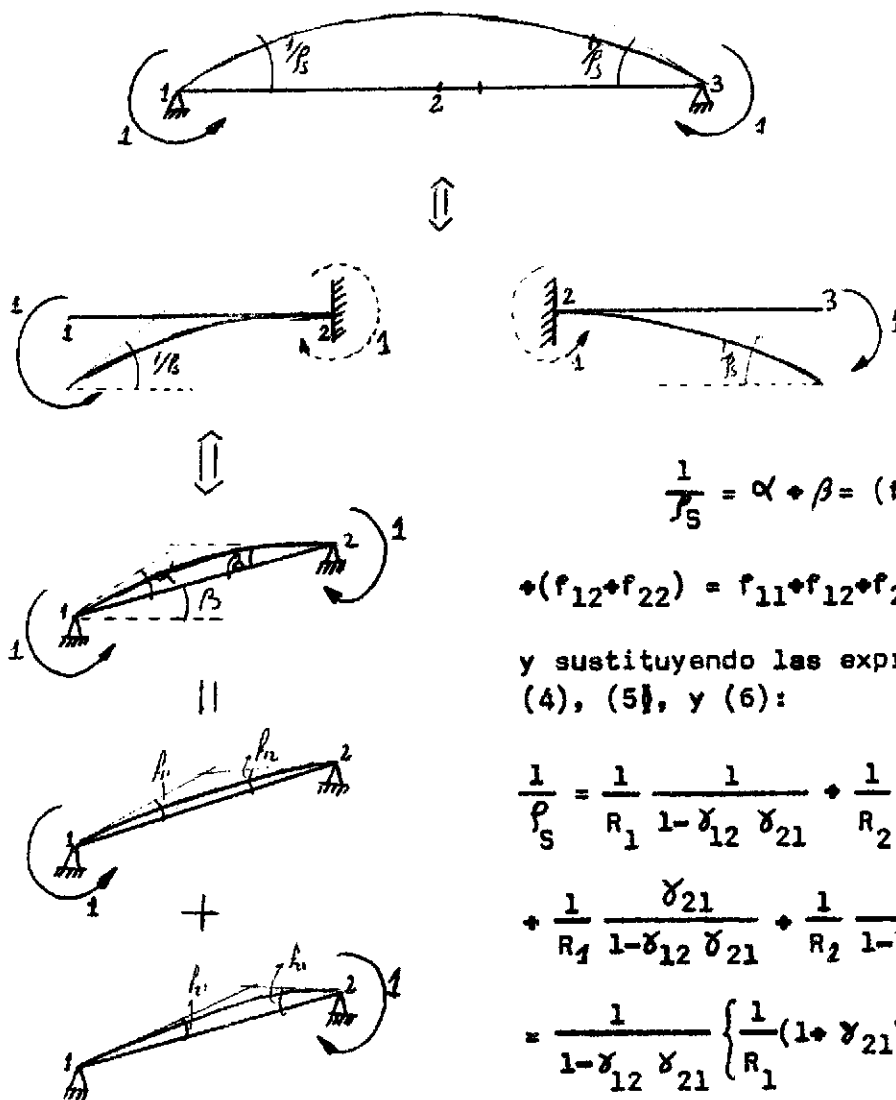
$$f_{22} = \frac{1}{R_2} \frac{1}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} \quad (5)$$

$$f_{21} = \frac{1}{R_1} \frac{\gamma_{21}}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} \quad (6)$$

NOTA: De las expresiones (4) y (6) se comprueba que  $f_{12}=f_{21}$  (VII.3.3) teniendo en cuenta (VII.3.1) o a la inversa.

Pasemos ahora al problema propuesto:

-Cálculo de  $\rho_S$ :



$$\frac{1}{f_s} = \alpha + \beta = (f_{11} + f_{21}) +$$

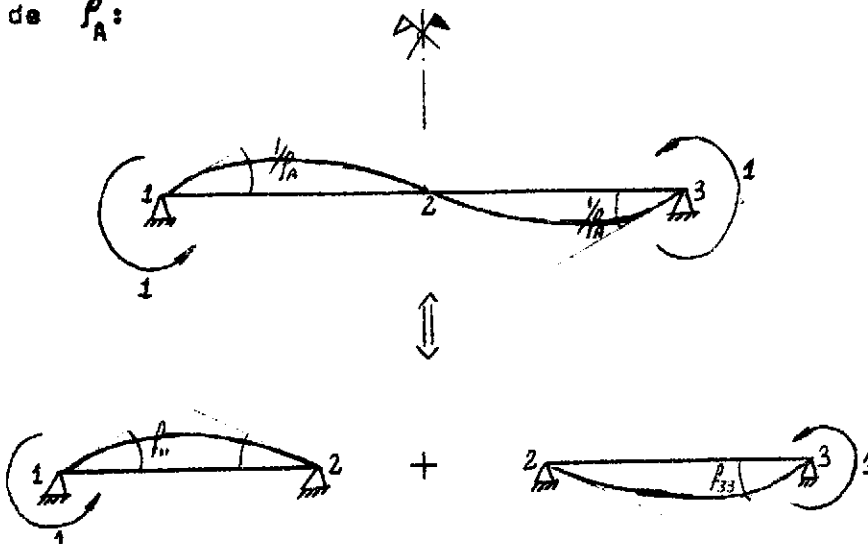
$$+ (f_{12} + f_{22}) = f_{11} + f_{12} + f_{21} + f_{22}$$

y sustituyendo las expresiones (3), (4), (5), y (6):

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_s} &= \frac{1}{R_1} \frac{1}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} + \frac{1}{R_2} \frac{\gamma_{12}}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} + \\ &+ \frac{1}{R_1} \frac{\gamma_{21}}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} + \frac{1}{R_2} \frac{1}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} = \\ &= \frac{1}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} \left\{ \frac{1}{R_1} (1 + \gamma_{21}) + \frac{1}{R_2} (1 + \gamma_{12}) \right\} \end{aligned}$$

$$f_s = \frac{R_1 \cdot R_2 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21})}{R_2 (1 + \gamma_{21}) + R_1 (1 + \gamma_{12})} \quad (7)$$

-Cálculo de  $f_A$ :



de donde:

$$\frac{1}{\rho_A} = r_{11}$$

y sustituyendo la expresión (3):

$$\frac{1}{\rho_A} = \frac{1}{1-\gamma_{12} \gamma_{21}} \cdot \frac{1}{R_1}$$

$$\rho_A = R_1 (1-\gamma_{12} \gamma_{21})$$

=====

Entrando con (7) y (8) en (1):

$$\Gamma = \frac{R_1 (1-\gamma_{12} \gamma_{21}) - \frac{R_1 R_2 (1-\gamma_{12} \gamma_{21})}{R_2 (1+\gamma_{21}) + R_1 (1+\gamma_{12})}}{R_1 (1-\gamma_{12} \gamma_{21}) + \frac{R_1 R_2 (1-\gamma_{12} \gamma_{21})}{R_2 (1+\gamma_{21}) + R_1 (1+\gamma_{12})}}$$

$$= \frac{R_2 (1+\gamma_{21}) + R_1 (1+\gamma_{12}) - R_2}{R_2 (1+\gamma_{21}) + R_1 (1+\gamma_{12}) + R_2}$$

y por fin:

$$\Gamma = \frac{R_2 \gamma_{21} + R_1 \gamma_{12} + R_1}{2R_2 + R_2 \gamma_{21} + R_1 \gamma_{12} + R_1}$$

=====

y en (2):

$$\rho = \frac{1}{2} R_1 (1-\gamma_{12} \gamma_{21}) \left( 1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_1 \gamma_{12} + R_2 \gamma_{21}} \right)$$

=====

Si la pieza 1-2 fuese simétrica:  $\gamma = \gamma_{12} = \gamma_{21}$   
 $R_1 = R_2 = R$

y entrando en (9) y (10) respectivamente:

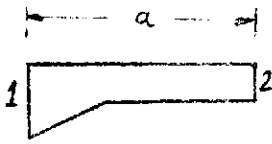
$$\Gamma = \frac{2\gamma + 1}{2\gamma + 3}$$

=====

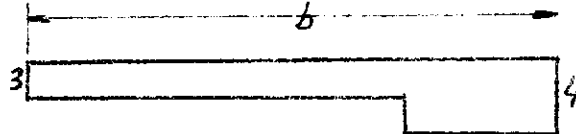
$$\rho = R \frac{1-\gamma^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1+\gamma} \right)$$

=====

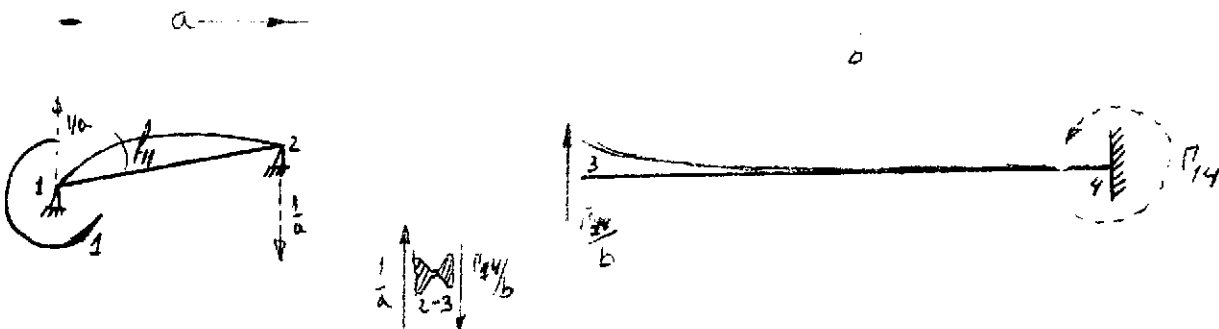
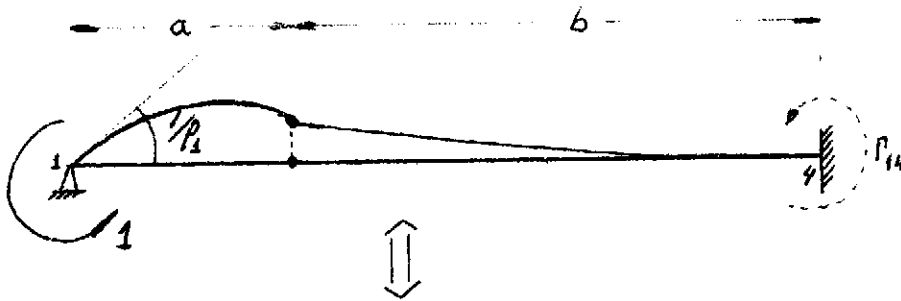
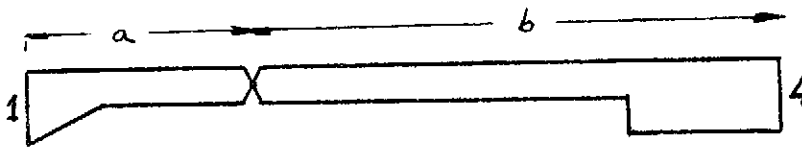
C) De una viga 1-2, tal como la de la figura se conocen sus coeficientes de rigidez ( $R_1, R_2$ ) y sus factores de transmisión ( $\gamma_{12}, \gamma_{21}$ ).



Y de otra viga 3-4, se conocen también sus rigideces y sus factores de transmisión ( $R_3, R_4, \gamma_{34}, \gamma_{43}$ ).



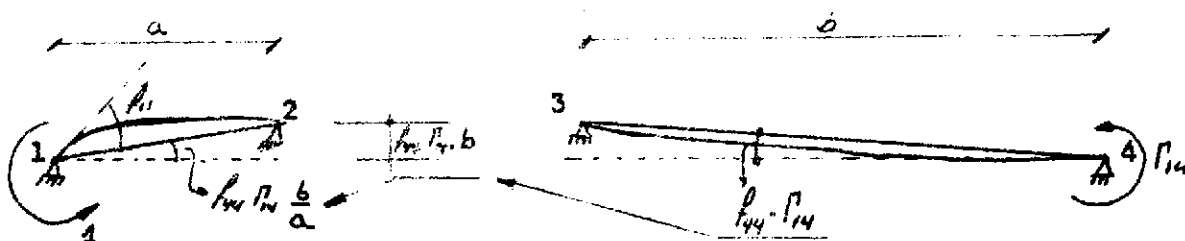
Se unen las dos vigas mediante una articulación en 2-3, resultando una nueva viga recta 1-4, de la cual se quieren hallar sus coeficientes de rigidez ( $\rho_1, \rho_4$ ) y sus factores de transmisión ( $\Gamma_{14}, \Gamma_{41}$ ).



El equilibrio de la articulación 2-3 exige:

$$\frac{\Gamma_{14}}{b} = \frac{1}{a} \quad \text{de donde:} \quad \Gamma_{14} = \frac{b}{a}$$





Estableciendo la igualdad del giro en 1:

$$\frac{1}{f_1} = f_{11} + f_{44} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{f_{14}} = f_{11} + f_{44} \frac{b^2}{a^2}$$

y teniendo en cuenta la expresión (3) de la página VII.16:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{R_1} \frac{1}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} + \frac{1}{R_4} \frac{1}{1 - \gamma_{34} \gamma_{43}} \frac{b^2}{a^2}$$

de donde finalmente:

$$f_1 = \frac{R_1 \cdot R_4 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21}) (1 - \gamma_{34} \gamma_{43}) a^2}{R_4 (1 - \gamma_{34} \gamma_{43}) a^2 + R_1 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21}) b^2}$$

Y por simetría circular:

$$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow 4 & 2 \rightarrow 3 \\ 4 \rightarrow 1 & 3 \rightarrow 2 \\ a \rightarrow b & \\ b \rightarrow a & \end{array}$$

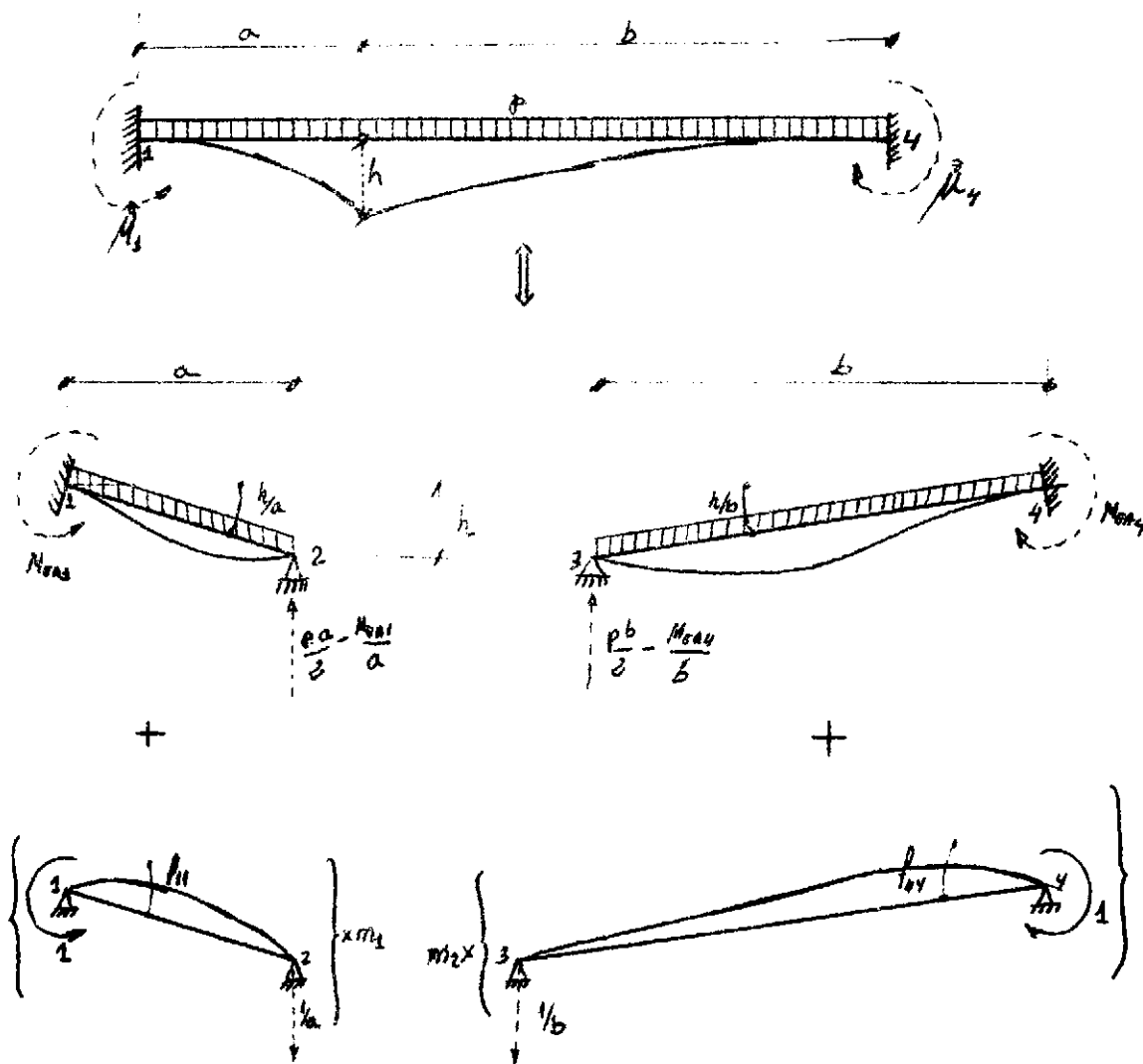
$$f_{41} = \frac{a}{b} \quad \text{y} \quad f_4 = \frac{R_4 \cdot R_1 (1 - \gamma_{43} \gamma_{34}) (1 - \gamma_{21} \gamma_{12}) b^2}{R_4 (1 - \gamma_{34} \gamma_{43}) a^2 + R_1 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21}) b^2}$$

Ademas de lo dicho, se conoce tambien los momentos de empotramiento perfecto de la viga 1-2 ( $\hat{M}_1, \hat{M}_2$ ) y los de la viga 3-4 ( $\hat{M}_3, \hat{M}_4$ ), para una carga (p) uniformemente repartida, y se quieren calcular los momentos de empotramiento perfecto de la viga 1-4 para dicha carga ( $\hat{M}_1, \hat{M}_4$ ).

Conocidos los momentos de empotramiento perfecto, podemos conocer los momentos de empotramiento de la misma viga articulada-empotrada para la misma carga (Ver par VII-15, apartado A de VII.7.2):

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_{EA_1} = \hat{M}_1 + \gamma_{21} \hat{M}_2 \\ \hat{M}_{EA_4} = \hat{M}_4 + \gamma_{34} \hat{M}_3 \end{array} \right\} \quad (11)$$

por lo que haremos el problema con estos y al final sustituiremos.



En la viga 1-4, establecemos el equilibrio de la articulación

2-3:

$$\frac{p \cdot a}{2} - \frac{M_{EA1}}{a} - \frac{m_1}{a} + \frac{p \cdot b}{2} - \frac{M_{EA4}}{b} - \frac{m_2}{b} = 0$$

de donde:

$$\frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{b} = \frac{p}{2} (a+b) - \frac{M_{EA1}}{a} - \frac{M_{EA4}}{b} \quad (12)$$

El giro del nudo 1 es nulo:

$$-\frac{h}{a} + m_1 \cdot f_{11} = 0 \quad \longrightarrow \quad m_1 = \frac{h}{a \cdot f_{11}} \quad (13)$$

El giro del nudo 4 es nulo:

$$-\frac{h}{b} + m_2 \cdot f_{44} = 0 \quad \longrightarrow \quad m_2 = \frac{h}{b \cdot f_{44}} \quad (14)$$

Entrando con (13) y (14) en (12):

$$h \cdot \left( \frac{1}{a^2 \cdot f_{11}} + \frac{1}{b^2 \cdot f_{44}} \right) = \frac{p}{2} (a+b) - \frac{M_{EA1}}{a} - \frac{M_{EA4}}{b} \quad (15)$$

Sacando el valor de  $h$  de (15) y entrando con el en (13):

$$m_1 = \frac{\frac{p}{2} \cdot (a+b) - \frac{M_{EA1}}{a} - \frac{M_{EA4}}{b}}{a \cdot f_{11} \cdot \left( \frac{1}{a^2 \cdot f_{11}} + \frac{1}{b^2 \cdot f_{44}} \right)}$$

luego:

$$\mu_1 = M_{EA1} + m_1 = M_{EA1} + \frac{\frac{p}{2} (a+b) - \frac{M_{EA1}}{a} - \frac{M_{EA4}}{b}}{a \cdot f_{11} \cdot \left( \frac{1}{a^2 \cdot f_{11}} + \frac{1}{b^2 \cdot f_{44}} \right)}$$

y teniendo en cuenta (3) y (11):

$$\mu_1 = \hat{m}_2 + \gamma_{22} \cdot \hat{m}_2 + \frac{\frac{p}{2} \cdot (a+b) - \frac{\hat{m}_1}{a} - \gamma_{21} \cdot \frac{\hat{m}_2}{a} - \frac{\hat{m}_4}{b} - \gamma_{34} \cdot \frac{\hat{m}_3}{b}}{a \cdot \frac{1}{R_1} \cdot (1 - \gamma_{12} \cdot \gamma_{21})^{-1} \cdot \left\{ \frac{R_1}{a^2} \cdot (1 - \gamma_{12} \cdot \gamma_{21}) + \frac{R_4}{b^2} \cdot (1 - \gamma_{34} \cdot \gamma_{43}) \right\}}$$

=====

y de la misma forma o bien haciendo la permutación de índices en la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow 4 \\ 2 &\longleftrightarrow 3 \\ a &\longleftrightarrow b \end{aligned}$$

$$\mu_4 = \hat{m}_4 + \gamma_{34} \cdot \hat{m}_3 + \frac{\frac{p}{2} \cdot (a+b) - \frac{\hat{m}_1}{a} - \gamma_{21} \cdot \frac{\hat{m}_2}{a} - \frac{\hat{m}_4}{b} - \gamma_{34} \cdot \frac{\hat{m}_3}{b}}{\frac{b}{R_4 (1 - \gamma_{34} \cdot \gamma_{43})} \cdot \left\{ \frac{R_4}{b^2} (1 - \gamma_{34} \cdot \gamma_{43}) + \frac{R_1}{a^2} \cdot (1 - \gamma_{12} \cdot \gamma_{21}) \right\}}$$

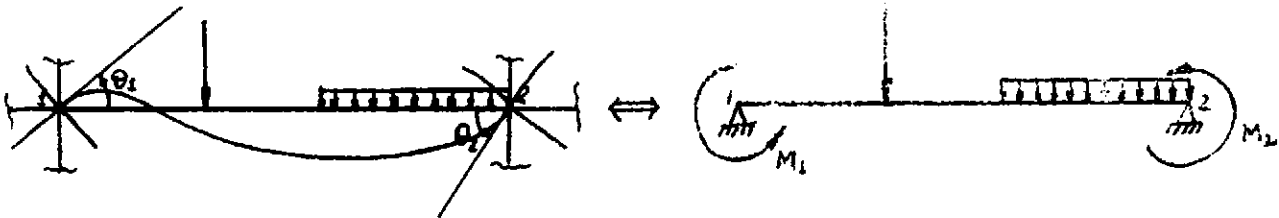
=====



**VIII.-RESOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS RETICULADAS POR EL METODO  
DE CROSS. ESTRUCTURAS RETICULADAS INTRASLACIONALES.**

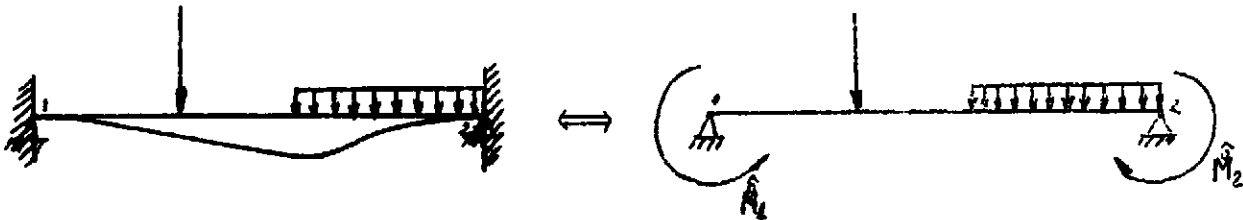
**VIII.1.-PRIMERA INTRODUCCIÓN.**

Sea una viga cualquiera 1-2 aislada de una estructura intras-  
lacional:

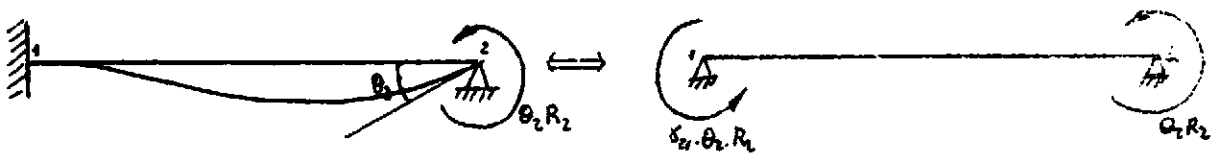


Descompongamoslo en tres estados:

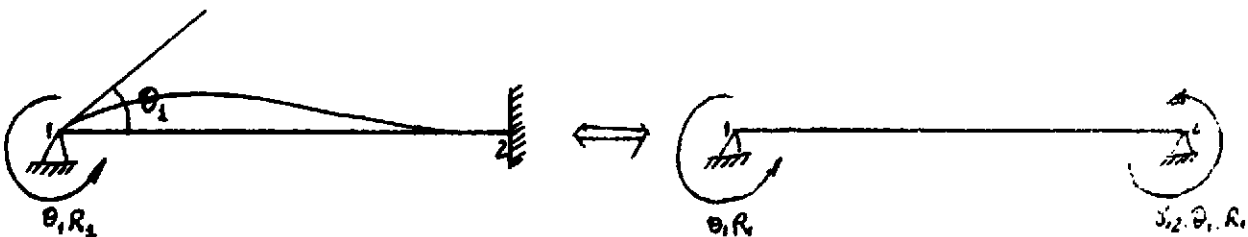
ESTADO 1 : (Empotrado en 1 y en 2).



ESTADO 2 : (Empotrado en 1).



ESTADO 3 : (Empotramiento en 2).

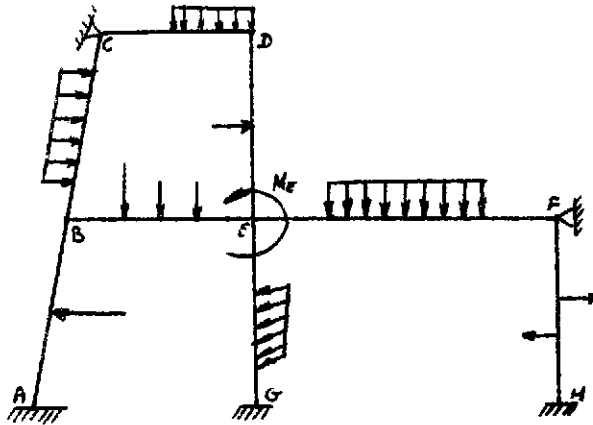


La suma de los tres estados nos da el estado inicial, luego:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \hat{m}_1 + \gamma_{21} \cdot \theta_2 \cdot R_2 + \theta_1 \cdot R_1 \\ m_2 &= \hat{m}_2 + \gamma_{12} \cdot \theta_1 \cdot R_1 + \theta_2 \cdot R_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(Hemos trabajado tomando cada momento con su signo).

### VIII.2.-SEGUNDA INTRODUCCIÓN.



Sea la estructura intraslacional de la figura, vamos a resolverla por situaciones de compatibilidad y no de equilibrio.

El ángulo formado por las barras que concurren en un nudo permanece constante, luego ~~tem~~ ~~dan~~ giran lo mismo.

Tomemos como incógnitas los giros en los nudos:

$$\theta_B, \theta_E, \theta_D, \theta_F, \theta_G$$

y una vez conocidos, podemos hallar los momentos sobre los extremos de la viga (ver apartado VIII.1, expresión (1)), y conocidos estos los esfuerzos en toda la estructura (ver apartado VII.2).

Vamos a plantear una ecuación por cada nudo, para obtener el sistema del que sacamos los  $\theta$ :

#### Primera forma de plantear el problema.

##### NOTACIONES

$M_{ij}$ : momento sobre el extremo i de la viga i-j que ejerce el nudo i.

$R_{ij}$ : rigidez del nudo i de la viga i-j.

$\gamma_{ij}$ : factor de transmisión del nudo i al j en la barra i-j.

$\hat{m}_{ij}$ : momento de empotramiento perfecto de la viga i-j en el nudo i.

Consideremos por ejemplo el nudo E. Y teniendo en cuenta el apartado VIII.1, para cada barra que concurre en él tenemos:

$$\left. \begin{aligned} M_{EB} &= R_{EB} \cdot \theta_E + \gamma_{BE} \cdot R_{BE} \cdot \theta_B + \hat{m}_{EB} \\ M_{ED} &= R_{ED} \cdot \theta_E + \gamma_{DE} \cdot R_{DE} \cdot \theta_D + \hat{m}_{ED} \\ M_{EF} &= R_{EF} \cdot \theta_E + \gamma_{FE} \cdot R_{FE} \cdot \theta_F + \hat{m}_{EF} \\ M_{EG} &= R_{EG} \cdot \theta_E + \gamma_{GE} \cdot R_{GE} \cdot \theta_G + \hat{m}_{EG} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(Ecuaciones que una vez halladas las } \theta \text{ se han de utilizar} \\ \text{otra vez para hallar los } M_{ij} \text{).} \end{array}$$

y sumandolas:

$$M_{EB} + M_{ED} + M_{EF} + M_{EG} = f_L(\theta_E, \theta_B, \theta_D, \theta_F, \theta_G) + \hat{m}_{EB} + \hat{m}_{ED} + \hat{m}_{EF} + \hat{m}_{EG}$$

( $f_L$  : función lineal).

Ahora bien:

$$M_E = M_{EB} + M_{ED} + M_{EF} + M_{EG}$$

siendo  $M_E$  el momento exterior que actúa sobre el nudo, quedando por tanto la ecuación correspondiente al nudo E:

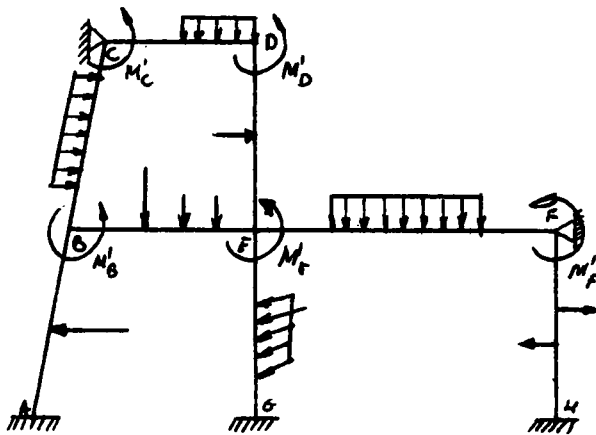
$$M_E - \hat{M}_{EB} - \hat{M}_{ED} - \hat{M}_{EF} - \hat{M}_{EG} = (R_{EB} + R_{ED} + R_{EF} + R_{EG}) \cdot \theta_E + \gamma_{BE} \cdot R_{BE} \cdot \theta_B + \gamma_{DE} \cdot R_{DE} \cdot \theta_D + \gamma_{FE} \cdot R_{FE} \cdot \theta_F + \gamma_{GE} \cdot R_{GE} \cdot \theta_G \quad (2)$$

Analogamente plantearíamos las ecuaciones para los demás nudos.

### Segunda forma de solucionar el problema.

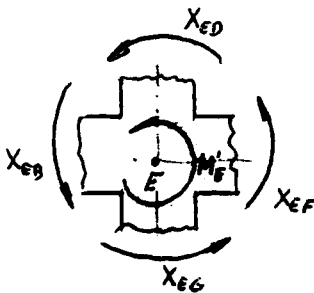
Descompongamos la estructura en dos estados.

El primero con las cargas sobre las vigas y unos momentos exteriores en los nudos ( $M'_i$ ) que evitan el giro de estos.



ESTADO CON NUDOS FIJOS.  
E. a.

Consideremos por ejemplo el equilibrio del nudo E en este estado:



$$M'_E + X_{EB} + X_{ED} + X_{EF} + X_{EG} = 0$$

DONDE:

$$X_{EB} = -\hat{M}_{EB}$$

$$X_{ED} = -\hat{M}_{ED}$$

$$X_{EF} = -\hat{M}_{EF}$$

$$X_{EG} = -\hat{M}_{EG}, \text{ luego:}$$

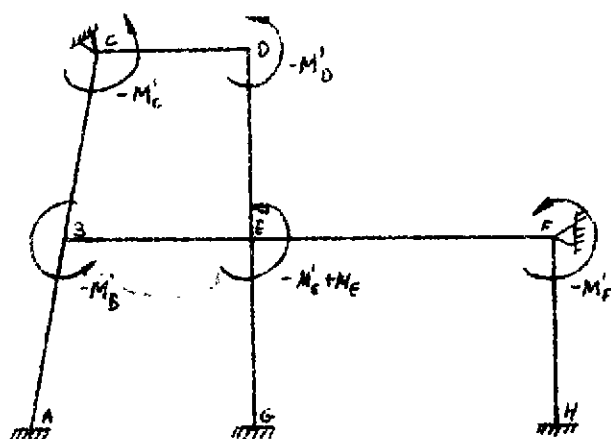
$$M'_E = \hat{M}_{EB} + \hat{M}_{ED} + \hat{M}_{EF} + \hat{M}_{EG} \quad (3)$$

es decir, que el momento exterior a aplicar al nudo es igual a la suma algebraica de los momentos de empotramiento perfecto de las barras que concurren en el nudo.

Analogamente para los demás nudos.

En el segundo estado consideremos la estructura sometida a los momentos que actuaban sobre los nudos en la estructura inicial y unos momentos iguales y contrarios a los que, en el estado anterior, evitaban el giro del nudo, para que se cumpla:

$$(E.1) + (E.2) = \text{Estado inicial.}$$



ESTADO MODAL.

E.2.

Resolvamos este estado.

Fijemonos por ejemplo en el nudo E. Y teniendo en cuenta el apartado VIII.1, para cada barra que concurre en el tenemos:

$$\left. \begin{aligned} M'_{EB} &= R_{EB} \cdot \theta_E + \gamma_{BE} \cdot R_{BE} \cdot \theta_B \\ M'_{ED} &= R_{ED} \cdot \theta_E + \gamma_{DE} \cdot R_{DE} \cdot \theta_D \\ M'_{EF} &= R_{EF} \cdot \theta_E + \gamma_{FE} \cdot R_{FE} \cdot \theta_F \\ M'_{EG} &= R_{EG} \cdot \theta_E + \gamma_{GE} \cdot R_{GE} \cdot \theta_G \end{aligned} \right\}$$

(Ecuaciones que una vez hallados los  $\theta$  se han de utilizar para hallar los  $M'_{ij}$ ).

y sumandolas:

$$M'_{EB} + M'_{ED} + M'_{EF} + M'_{EG} = f(\theta_E, \theta_B, \theta_D, \theta_F, \theta_G)$$

pero:

$$M'_{EB} + M'_{ED} + M'_{EF} + M'_{EG} = -M'_E + M_E,$$

quedando por tanto la ecuación correspondiente al nudo E:

$$\begin{aligned} -M'_E + M_E &= (R_{EB} + R_{ED} + R_{EF} + R_{EG}) \cdot \theta_E + \gamma_{BE} \cdot R_{BE} \cdot \theta_B + \gamma_{DE} \cdot R_{DE} \cdot \theta_D + \\ &+ \gamma_{GE} \cdot R_{GE} \cdot \theta_G + \gamma_{FE} \cdot R_{FE} \cdot \theta_F \end{aligned} \quad (4)$$

Y análogamente plantearíamos las ecuaciones para los demás nudos.

En este segundo procedimiento, para obtener los  $M_{ij}$  reales de cada viga hay que sumar los correspondientes de E.1 y E.2:

$$M_{ij} = \hat{M}_{ij} + M'_{ij}.$$

Si tenemos en cuenta el valor de  $M'_{ij}$ , sustituyendo en la expresión anterior tenemos:

$$M_{ij} = R_{ij} \cdot \theta_i + \gamma_{ji} \cdot R_{ji} \cdot \theta_j + \hat{M}_{ij}$$

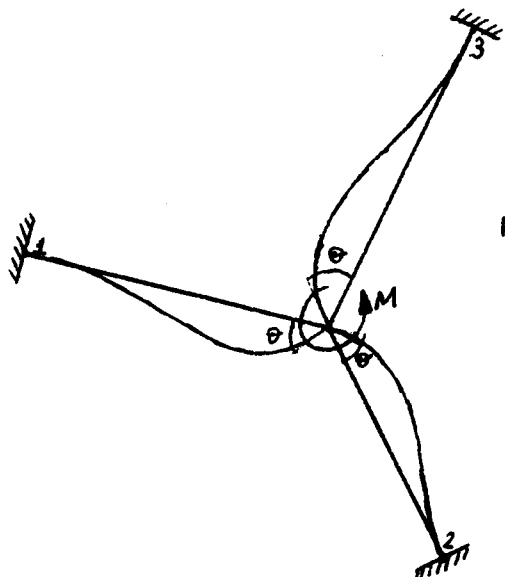
que coincide con el valor que obtuvimos en el primer procedimiento, como tenía que suceder.

También podemos comprobar la equivalencia de las ecuaciones de los sistemas del primer y del segundo procedimiento; nos basta sustituir la expresión (3) en la ecuación (4) para obtener la (2).

### VIII.3.-METODO DE CROSS.

Cuando la estructura es importante, el sistema que planteamos en VIII.2 puede resultar inaccesible por los métodos tradicionales de cálculo, debido a su envergadura. Se han buscado pues otros procedimientos para resolver dicho sistema por métodos aproximados. El método de Cross es uno de ellos.

Veamos los pasos de este método sobre la estructura de la figura, en la que las tres barras están unidas en A y rigidamente empuetadas en el otro extremo, actuando en el nudo A un momento exterior M.



Paso 1: Determinar la rigidez y los factores de transmisión de cada barra, (ver capítulo VII).

$R_{ij}$ : Rigidez del nudo i en la barra i-j.

$\gamma_{ij}$ : Factor de transmisión del nudo i al j en la barra i-j.

Paso 2: Determinar los coeficientes de reparto.

Sea  $\theta$  el ángulo girado por las tres barras en A, teniendo en cuenta la definición de rigidez se cumplirá:

$$= \frac{M_{A1}}{R_{A1}} = \frac{M_{A2}}{R_{A2}} = \frac{M_{A3}}{R_{A3}} =$$

(COMPATIBILIDAD)

y según una conocida propiedad de las proporciones:

$$= \frac{M_{A1} + M_{A2} + M_{A3}}{R_{A1} + R_{A2} + R_{A3}} = \frac{M}{\sum_{i=1}^3 R_{Ai}} \quad (5)$$

pues se ha de cumplir:

$$M = M_{A1} + M_{A2} + M_{A3} \quad (\text{EQUILIBRIO})$$

Se denominan coeficientes de reparto a:

$$\frac{R_{A1}}{\sum_{i=1}^3 R_{Ai}}, \quad \frac{R_{A2}}{\sum_{i=1}^3 R_{Ai}}, \quad \frac{R_{A3}}{\sum_{i=1}^3 R_{Ai}}$$

Paso 3: Efectuar el REPARTO.

De la proporción (5):

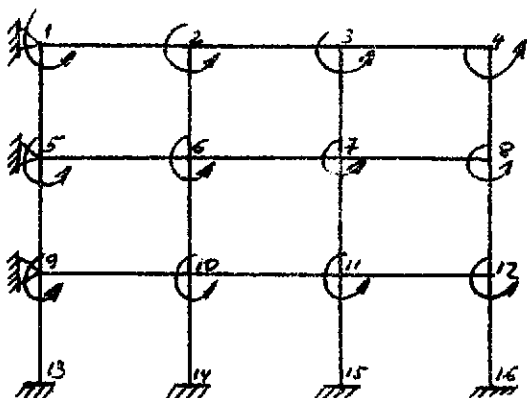
$$M_{A1} = \frac{R_{A1}}{\sum_{i=1}^3 R_{Ai}} \cdot M, \quad M_{A2} = \frac{R_{A2}}{\sum_{i=1}^3 R_{Ai}} \cdot M, \quad M_{A3} = \frac{R_{A3}}{\sum_{i=1}^3 R_{Ai}} \cdot M$$

Paso 5: Efectuar la TRASMISIÓN.

$$M_{1A} = M_{A1} \cdot \gamma_{A1}, \quad M_{2A} = M_{A2} \cdot \gamma_{A2}, \quad M_{3A} = M_{A3} \cdot \gamma_{A3}$$

En este caso por ser un ejemplo sencillo queda con esto solucionado el problema en cuanto al método de Cross se refiere.

Veamos como se procede en un caso más complicado, como por ejemplo el de la figura.



Descomponemos la estructura en dos estados uno CON NUDOS FIJOS y otro MODAL (este es el dibujado), ver "segunda forma de solucionar el problema", de VIII.2.

Fijemonos ahora solo en el estado MODAL:

- anclamos todos los nudos.
- soltamos el nudo 1 y efectuamos el reparto y la transmisión, como se hizo en el ejemplo anterior.

-anclamos el nudo 1, y soltamos el 2, efectuando nuevamente el reparto y la transmisión correspondiente al nudo soltado

-Procedemos así sucesivamente hasta que hallamos acabado con todos los nudos de la estructura. A continuación empezamos un nuevo ciclo por el nudo 1 efectuando el reparto y la transmisión de los momentos transmitidos en el ciclo anterior cambiados de signo. Realizamos un número  $n$  de ciclos, hasta que los momentos salgan pequeños (es mejor pararse en un reparto).

-Los momentos actuantes sobre cada barra en cada nudo, los obtenemos sumando todos los momentos de transmisión y reparto hallados.

#### R E S U M E N:

- 1º.-Determinar  $R$  y  $\gamma$ .
- 2º.-Determinar los coeficientes de reparto en cada extremo de la barra.
- 3º.-Determinación de los momentos de empotramiento perfecto.
- 4º.-REPARTO. ( $M^I, M^{III}, M^V, \dots$ )
- 5º.-Transmisión a cada nudo un número  $n$  de veces. ( $M^{II}, M^{IV}, \dots$ )
- 6º.-En cada extremo de barra el momento real es la suma de los repartidos y de los transmitidos.



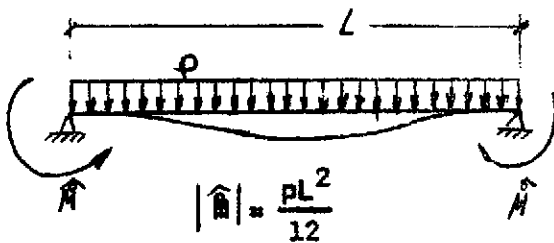
BARRA	a (mts)	b (mts)	$I = a \frac{b^3}{12} \text{ m}^4$	$E \text{ (T/m}^2\text{)}$	L (mts)	$R = 4 \frac{EI}{L^3}$	$\delta$
AB	0.25	0.50	$2.60 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^6$	5.000	4160.	0.5
AC	0.25	0.25	$0.32 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^6$	3.000	853.	0.5
BD	0.25	0.25	$0.32 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^6$	3.000	853.	0.5
CD	0.25	0.60	$4.50 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^6$	5.000	7200.	0.5
CE	0.25	0.25	$0.32 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^6$	4.272	599	0.5
DE	0.25	0.25	$0.32 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^6$	4.272	599	0.5

2º) Determinar los coeficientes de reparto en cada extremo de la barra.

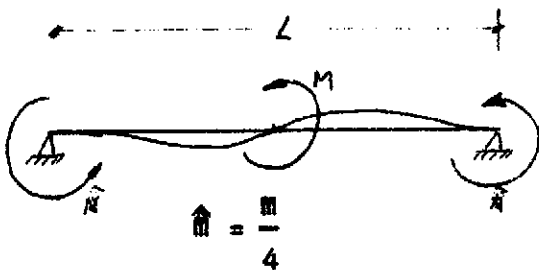
(En el cuadro final)

3º) Determinación de los momentos de empotramiento perfecto.

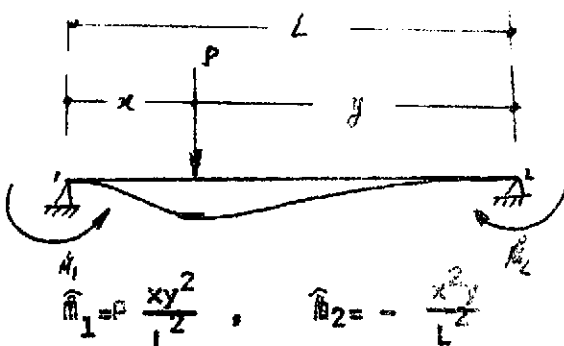
(Las vigas son de sección prismática).



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{AB: } |\hat{M}_{AB}| = 2 \frac{5^2}{12} = 4,17 \text{ m.T} \\ \text{CE: } |\hat{M}_{CE}| = 1 \frac{1,5^2}{12} = 0,19 \text{ m.T} \end{array} \right.$$



$$\text{CD: } \hat{M} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ m.T}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{BD: } \hat{M}_{BD} = 5 \frac{2 \cdot 1^2}{3^2} = -1,11 \text{ m.T} \\ \text{DE: } \hat{M}_{DE} = 5 \frac{2^2 \cdot 1}{3^2} = 2,22 \text{ m.T} \end{array} \right.$$



	NUDO →	A	A	B	B	C	C	C	D	D	D	E	F	
	BARRA →	AB	AC	BA	BD	CA	CD	CE	DB	DC	DF	EC	FD	
	R	4160	853	4160	853	853	7200	599	853	7200	599	599	599	Rigidez
	$\delta$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	Coef. transmi- sion reparte
	K	0.830	0.170	0.830	0.170	0.099	0.832	0.069	0.099	0.832	0.069	0	0	
(N)	$M^D$	4.17	0	-4.17	-1.11	0	-2.5	-0.19	+2.22	-2.5	0	+0.19	0	para emp. p.d.
	$M^{(1)}$	-3.46	-0.71	4.38	0.90	0.28	2.24	0.19	0.03	0.23	0.02	0	0	Reparto
(M)	$M^{(2)}$	2.19	0.14	-1.73	0.01	-0.36	0.12	0	0.45	1.12	0	0.09	0.01	Transmisión
	$M^{(3)}$	-1.93	-0.39	1.43	0.29	0.02	0.20	0.02	-0.16	-1.31	-0.10	0	0	Reparto
(M)	$M^{(4)}$	0.72	0.01	-0.97	-0.08	-0.20	-0.66	0	0.15	0.10	0	0.01	-0.05	Transmisión
	$M^{(5)}$	-0.61	-0.12	0.87	0.18	0.09	0.72	0.05	-0.02	-0.21	-0.02	0	0	Reparto
(M)	$M^{(6)}$	0.44	0.05	-0.52	-0.04	-0.06	-0.11	0	0.09	0.36	0	0.03	-0.01	Transmisión
	$M^{(7)}$	-0.41	-0.08	0.27	0.06	0.02	0.14	0.01	-0.04	-0.32	-0.04	0	0	Reparto
	$\Sigma$	1.10	-1.10	-0.24	+0.24	-0.22	+0.15	+0.07	2.72	-2.58	-0.14	0.32	-0.05	m/I

(N): Recordar el apartado VII.2 (se-  
gunda forma de solucionar el problema)

$$M_{ij} = M_{ji} + M_{ij}^D$$

donde  $M_{ij}^D$  es el momento en el nudo

del NUDO  $i$ , siendo su valor la suma com-  
biada de signo de los momentos de em-  
potamiento perfecto de las barras que  
concurran en el nudo.

De aquí el cambio de signo  
al efectuar el primer reparto, ya que  
lo que figura en la fila  $M_{ij}$ , son los  
momentos de empotamiento perfecto  
y no sus repartos.

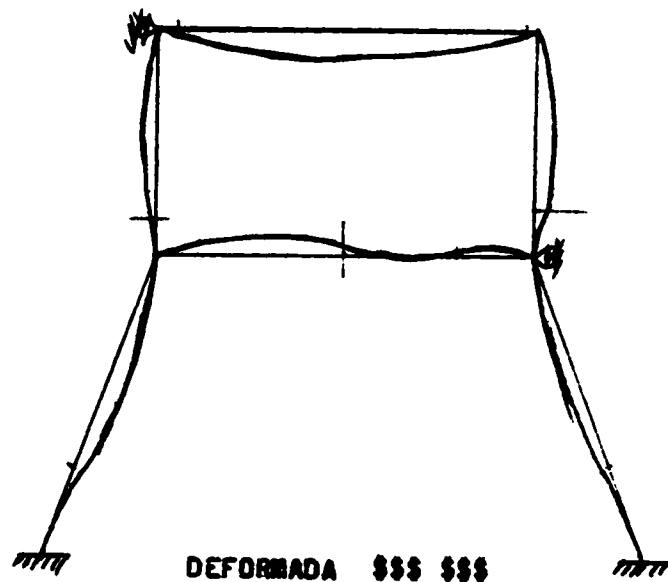
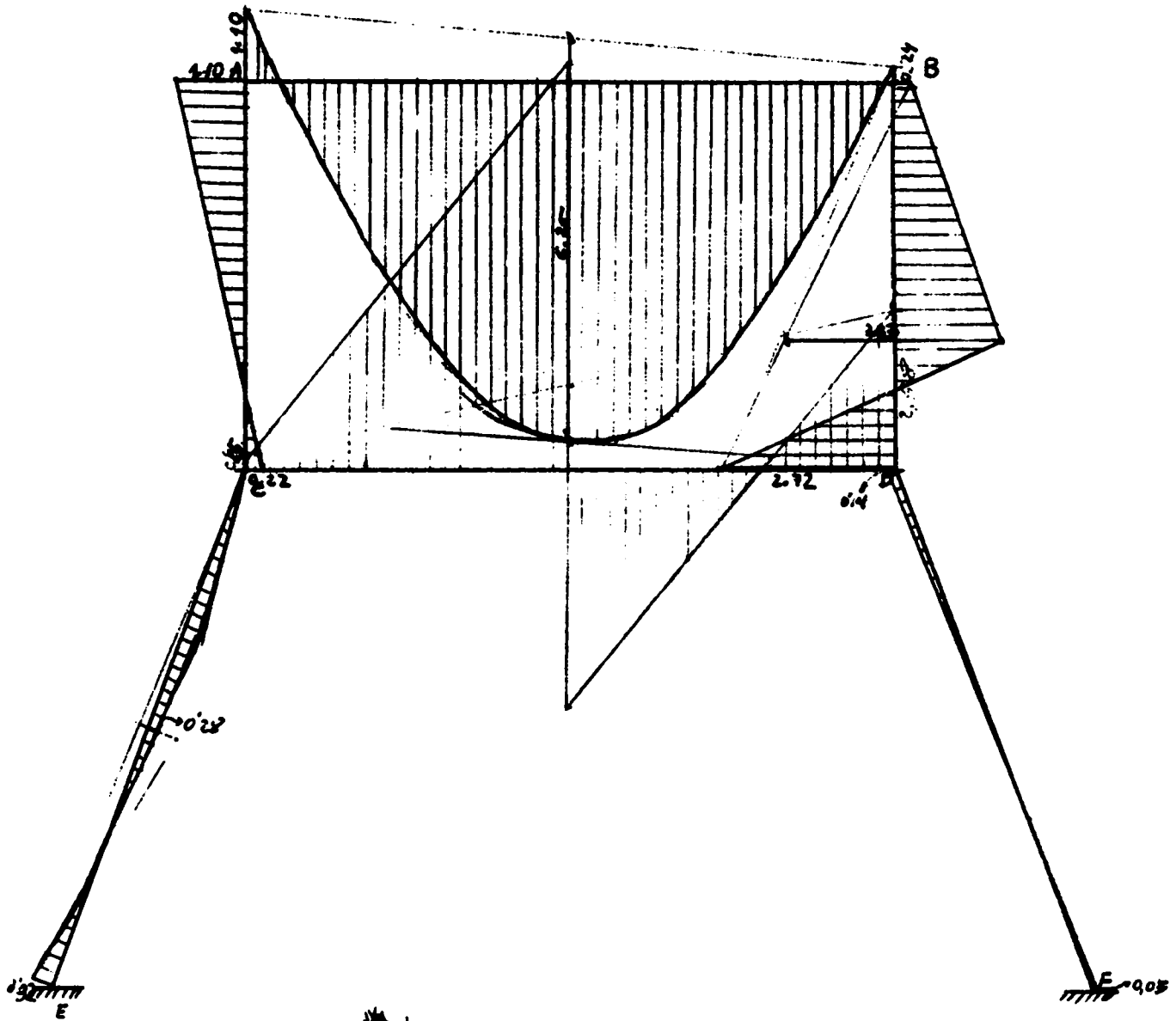
(N): Al efectuar una transmisión estamos  
suponiendo todos los nudos rígidamente  
empotrados (menos el correspondiente  
en el que estamos trabajando), y como  
no es así, hay que repartirlos, lo que se  
hace en el reparto.

De aquí el cambio de sig-  
no al efectuar el reparto.

# LEY DE MOMENTOS FLECTORES

Escala 1cm:1 t.m

(Dibujadas del lado traccionado)

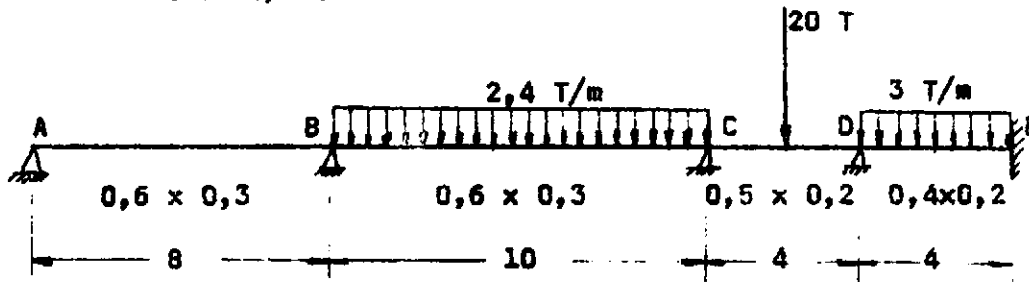


## VIII.5.-E J E M P L O.

Se trata de resolver por el metodo de Cross la viga continua-  
de la figura, con las cargas y caracteristicas en ella indicada.

En las dimensiones de las secciones, la mayor longitud corres-  
ponde al canto de la viga.

$$E=2.10^6 \text{ T/m}^2.$$

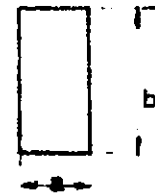


(Todas las longitudes estan en metros).

12.-Determinación de R y  $\gamma$ .

Por ser vigas de sección constante:

$$R=4 \frac{EI}{L}, \quad I=\frac{b^3}{12}, \quad \gamma=0,5$$



Barra	a (mts)	b (mts)	I (mts <sup>4</sup> )	E (T/m <sup>2</sup> )	L (mts)	R (Txm)	$\gamma$
AB	0,3	0,6	$5,4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^6$	8	$5,4 \cdot 10^3$	0,5
BC	0,3	0,6	$5,4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^6$	10	$4,32 \cdot 10^3$	0,5
CD	0,2	0,5	$2,083 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^6$	4	$4,17 \cdot 10^3$	0,5
DE	0,2	0,4	$1,06 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^6$	4	$2,13 \cdot 10^3$	0,5

## 29.-Determinación de los coeficientes de reparto.

(En el cuadro final).

## 39.-Determinación de los momentos de empotramiento perfecto:

$$AB: \hat{M}_A = 0 \quad \hat{M}_B = 0$$

$$BC: \hat{M}_B = \frac{P \cdot L^2}{12} = \frac{2,4 \cdot 10^2}{12} = 20 \text{ Txm.} \quad \hat{M}_C = -20 \text{ Txm.}$$

$$CD: \hat{M}_C = \frac{P \cdot L}{8} = \frac{20 \cdot 4}{8} = 10 \text{ Txm.} \quad \hat{M}_D = -10 \text{ Txm.}$$

$$DE: \hat{M}_D = \frac{P \cdot L^2}{12} = \frac{3 \cdot 4^2}{12} = 4 \text{ Txm.} \quad \hat{M}_E = -4 \text{ Txm.}$$

NUDO	A	B		C		D		E
Barra	AB	BA	BC	CB	CD	DC	DE	ED
Rigidez	5,4	5,4	4,32	4,32	4,17	4,17	2,13	2,13
Cof. Reparto	1	0,56	0,44	0,51	0,49	0,66	0,34	0
Trans	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$M^{(0)}$	0	0	20	-20	10	-10	4	-4
$M^{(1)}$	0	-11,20	-8,80	5,10	4,90	3,36	2,04	0
$M^{(2)}$	-5,60	0	2,55	-4,40	1,98	2,45	0	1,02
$M^{(3)}$	5,60	-1,43	-1,12	1,23	1,19	-1,62	-0,83	0
$M^{(4)}$	-0,72	2,80	0,62	-0,56	-0,81	0,60	0	-0,42
$M^{(5)}$	0,72	-1,92	-1,50	0,70	0,67	-0,40	-0,20	0
$M^{(6)}$	-0,96	0,36	0,35	-0,75	-0,20	0,34	0	-0,10
$M^{(7)}$	0,96	-0,40	-0,31	0,48	0,47	-0,22	-0,12	0
	0	-11,79	11,79	-18,20	18,20	-4,89	4,89	-3,5 T.m.

NOTAS:  
=====

1).-El superíndice (o) corresponde a los momentos de empotramiento perfecto.

Los superíndices impares corresponden a los repartos.

Los superíndices pares corresponden a las transmisiones.

2).-NUDO A. Cualquier momento aplicado en él lo absorbe la barra AB; es como si esta estuviese unida a otra de rigidez cero en el nudo A. Por esto el coeficiente de reparto de la barra AB en el nudo A es 1:

$$\frac{R_A}{R_A + 0} = 1$$

3).-NUDO E. Cualquier momento aplicado en él lo absorbe el apoyo; es como si la barra ED estuviese unida a otra de rigidez infinita en el nudo E. Por esto el coeficiente de reparto de la barra ED en el nudo E es 0:

$$\frac{R_E}{R_E + \infty} = 0$$

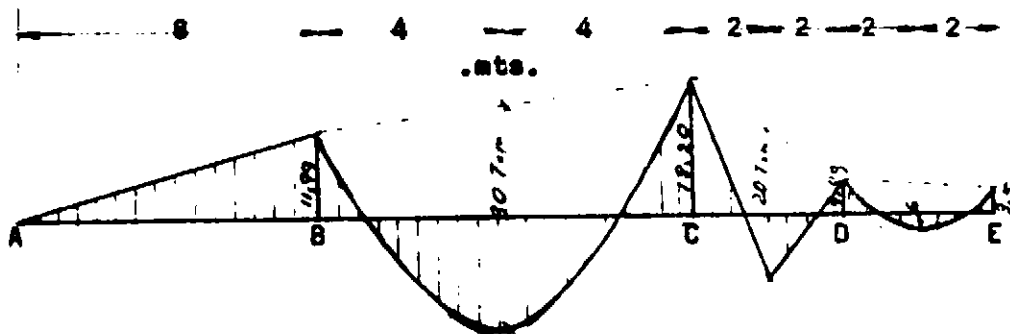
4).-Los momentos que se obtienen al sumar las columnas (en rojo), son los que ejerce el nudo sobre la barra.

5).- Si hubiese algún momento exterior sobre un nudo, le ten-

driamos en cuenta solo al hacer el primer reparto, luego se sigue igual. Es decir, en el primer reparto, sumariamos los momentos de empotramiento perfecto correspondientes al nudo en que estamos trabajando, cambiariamos el signo y le sumariamos el momento exterior, procediendo a continuación a multiplicar por los coeficientes de reparto.

6).-La ley de flectores resultante la obtenemos sumando la correspondiente a los momentos hallados y la isostática de la viga.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{BC:} & \frac{pL^2}{8} = \frac{2,4 \times 10^2}{8} = 30 \text{ Txm.} & \\
 \text{CD:} & \frac{pL}{4} = \frac{20 \times 4}{4} = 20 \text{ Txm.} & \\
 \text{DE:} & \frac{pL^2}{8} = \frac{3 \times 4^2}{8} = 6 \text{ txm.} & 
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{BC:} \\ \text{CD:} \\ \text{DE:} \end{array}} \right\} \text{Isostatica.}$$



LEY DE MOMENTOS FLECTORES.

Del lado traccionado.

1 cm = 0,1 T x m.

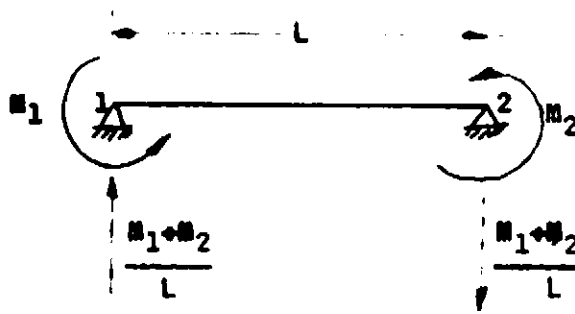
1 : 200

7).- La ley de cortantes la obtenemos sumando la debida a los momentos calculados con la isostática.

Cortante positivo:



...a los momentos hallados.



$$Q_1 = Q_2 = - \frac{M_1 + M_2}{L}$$

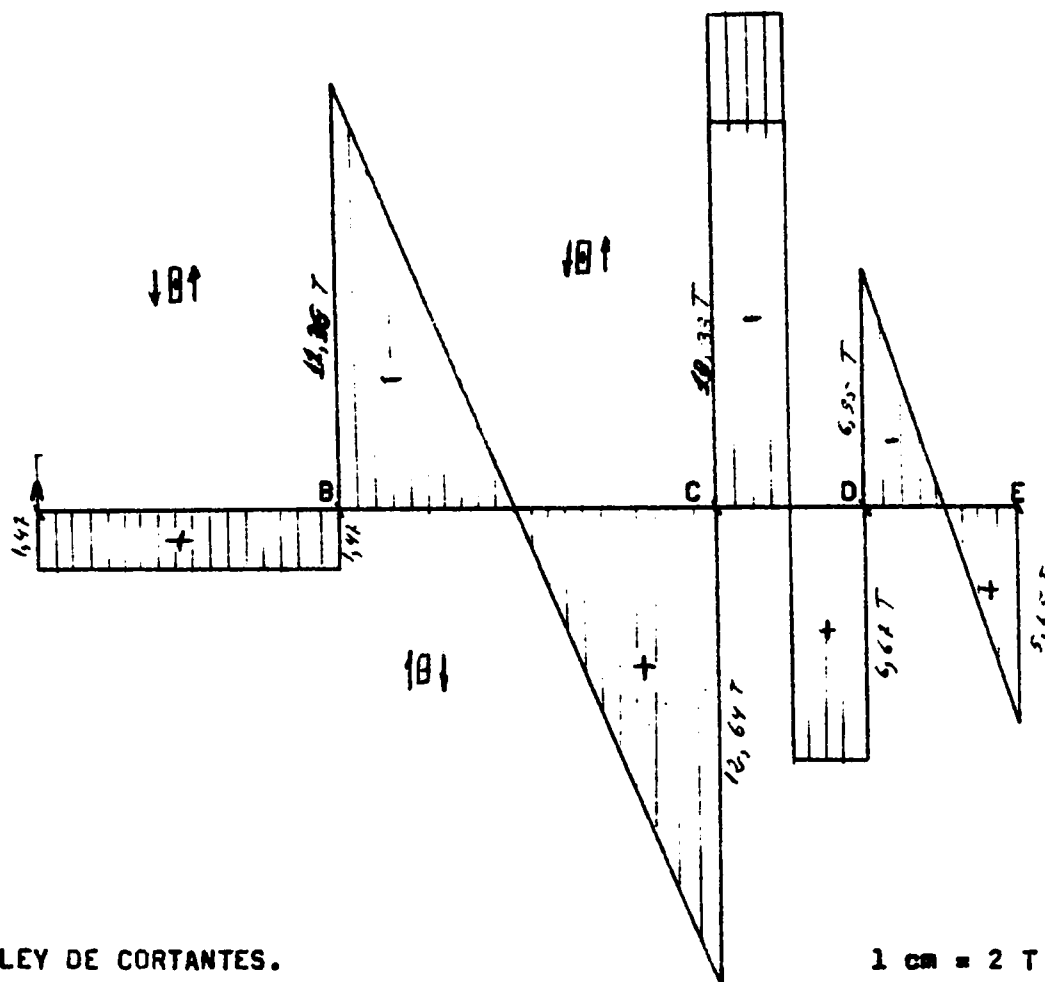
$$\begin{aligned}
 AB: \quad Q_A=Q_B &= -(-11,79)/8 = +1,47 \text{ T.} \\
 BC: \quad Q_B=Q_C &= -(11,79 + (-18,20))/10 = 0,64 \text{ t.} \\
 CD: \quad Q_C=Q_D &= -(18,20 - 4,89)/4 = -3,33 \text{ T.} \\
 DE: \quad Q_D=Q_E &= -(4,89 - 3,5) / 4 = -0,35 \text{ T.}
 \end{aligned}$$

...a la isostática:

$$\begin{aligned}
 AB: \quad Q_A=Q_B &= 0 \text{ T.} \\
 BC: \quad Q_B=Q_C &= -pL/2 = -2,4 \times 10 / 2 = -12 \text{ T.} \quad Q_C = pL/2 = 12 \text{ T.} \\
 CD: \quad Q_C=Q_D &= -P/2 = -20/2 = -10 \text{ T.} \quad Q_D = P/2 = 10 \text{ T.} \\
 DE: \quad Q_D=Q_E &= -pL/2 = -3 \times 4 / 2 = -6 \text{ T.} \quad Q_E = pL/2 = 6 \text{ T.}
 \end{aligned}$$

Y en total:

$$\begin{aligned}
 AB: \quad Q_A &= +1,47 + 0 = +1,47 \text{ T.} & Q_B &= -1,47 + 0 = -1,47 \text{ T.} \\
 BC: \quad Q_B &= 0,64 - 12 = -11,36 \text{ T.} & Q_C &= 0,64 + 12 = 12,64 \text{ T.} \\
 CD: \quad Q_C &= -3,33 - 10 = -13,33 \text{ T.} & Q_D &= -3,33 + 10 = 6,67 \text{ T.} \\
 DE: \quad Q_D &= -0,35 - 6 = -6,35 \text{ T.} & Q_E &= -0,35 + 6 = 5,65 \text{ T.}
 \end{aligned}$$





### VIII.6.2.-BARRAS rigidamente empotradas en un extremo.

En el ejemplo VIII.5, la barra DE es de este tipo.

Si observamos la tabla de la página VIII.12, vemos que la columna del nudo E no afecta para nada a la columna DE, pues todas las transmisiones que recibe esta de aquella son aúlas, luego por este lado podemos estar tranquilos si quitamos la columna correspondiente al nudo E.

Y para hallar el momento sobre el extremo E de la barra DE, observando en la misma tabla el proceso de reparto, transmisión y suma final, vemos que se cumple:

$$m_{ji} = (m_{ij} - \hat{m}_{ij}) \cdot \gamma_{ij} + \hat{m}_{ji}$$

$m_{ij}$  = momento sobre la barra  $ij$  en el extremo  $i$ .

$\hat{m}_{ij}$  = momento de empotramiento perfecto sobre la barra  $ij$  en el nudo  $i$ .

$\gamma_{ij}$  = factor de transmisión del nudo  $i$  al  $j$  en la barra  $ij$ .

### VIII.6.3.-Aplicación de las dos simplificaciones anteriores al ejemplo VIII.6.

Viga AB: Coeficiente de Rigidez:  $R = 3EI/L = 3 \times 2 \times 10^6 \times 5,4 \times 10^{-3}/8 = 4,05 \times 10^3 \text{ T} \times \text{m}.$

Momento de empotramiento perfecto:



$\hat{m}_{BA} = 0$ , pues en ejemplo que estamos estudiando no existen cargas sobre la viga.

Si existiesen, fueran del tipo que fueran, como por ejemplo un momento exterior en el nudo A, se calcularían mediante los teoremas de Mohr o consultándolos en una tabla. (En el ejemplo propuesto en este párrafo es evidente que  $\hat{m}_{BA} = m \cdot \gamma_{AB}$ , siendo  $m$  el momento exterior en A, y  $\gamma_{AB}$  el factor de transmisión del nudo A al B).



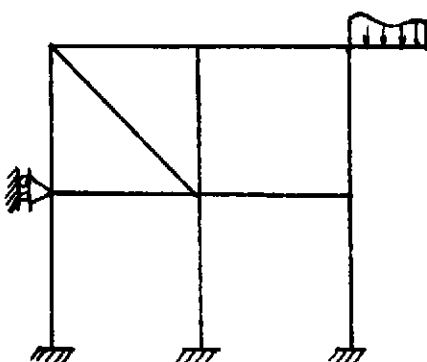
NUDO	B		C		D	
Barra	BA	BC	CB	CD	DC	DE
$R_{ij}$	4,05	4,32	4,32	4,17	4,17	2,13
Coef. reparto	0,48	0,52	0,51	0,49	0,66	0,34
Trasm.		0,5	0,5	0,5	0,5	
$\hat{M}$	0	20	-20	10	-10	4
$M^{(2)}$	-9,60	-10,40	5,10	4,9	3,96	2,04
$M^{(3)}$	0	2,55	-5,20	1,98	2,45	0
$M^{(4)}$	-1,22	-1,33	1,64	1,58	-1,62	-0,83
$M^{(5)}$	0	0,82	-0,67	-0,81	0,79	0
$M^{(6)}$	-0,39	-0,43	0,75	0,73	-0,52	-0,27
$M^{(7)}$	0	0,38	-0,22	-0,26	0,37	0
$M^{(8)}$	-0,18	-0,20	0,24	0,24	-0,24	-0,13
	-11,39	11,39	-18,36	18,36	-4,81	4,81

T x m.

$$M_{ED} = (M_{DE} - \hat{M}_{DE})_{DE} + \hat{M}_{ED} = (4,81 - 4) \cdot 0,5 + (-4) = -3,60 \text{ T x m.}$$

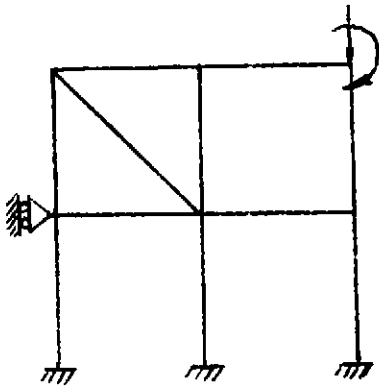
Los resultados obtenidos no coinciden exactamente con los primeros que se sacaron, y es que no hay que olvidar que estamos en un metodo iterativo, y según a la altura del itinerario que nos paremos, tendremos unos resultados más o menos aproximados.

#### VIII.6.4.-Voladizo cargado.



1 er. procedimiento: Considerando el voladizo como una nueva viga de rigidez y coeficientes de transmisión nulos, y con un momento de empotramiento perfecto el que ejerce el nudo sobre el voladizo.

Pero este es el metodo general, y lo que estamos tratando aquí es quitar "columnas" al metodo de Cross, por tanto vamos como lo podemos simplificar:



2º procedimiento: Reducir el voladizo a una fuerza y un momento sobre el nudo.

La fuerza solo nos interesa a la hora de considerar axiles, pues es una fuerza aplicada directamente en un nudo.

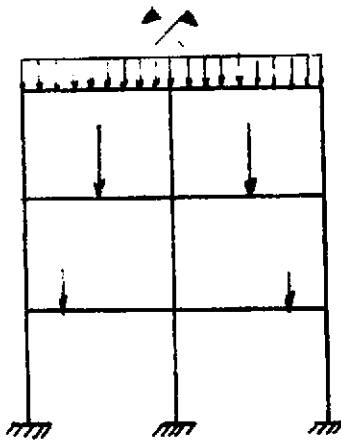
En cuanto al momento exterior, repetamos aquí lo que se dijo en la nota 5, pag VIII.12: "Que solo se tiene en cuenta al efectuar el primer reparto correspondiente al nudo sobre el que actúa el momento flector:

$(-\sum \hat{M}_i + M_i)$  que es lo que se reparte.

$\sum \hat{M}_i$ : suma de los momentos de empotramiento perfecto de las barras concurrentes en el nudo  $i$  (nudo sobre barra).

$M_i$ : momento exterior."

#### VIII.6.5.-Estructura simétrica con simetría de cargas.



CASO A: Existe un soporte en el eje de simetría.

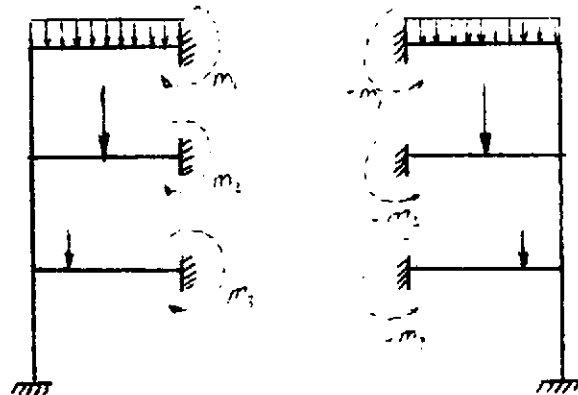
-En los nudos del eje:

.no hay desplazamiento, por estar estudiando una estructura inercial.

.no hay giro por simetría.

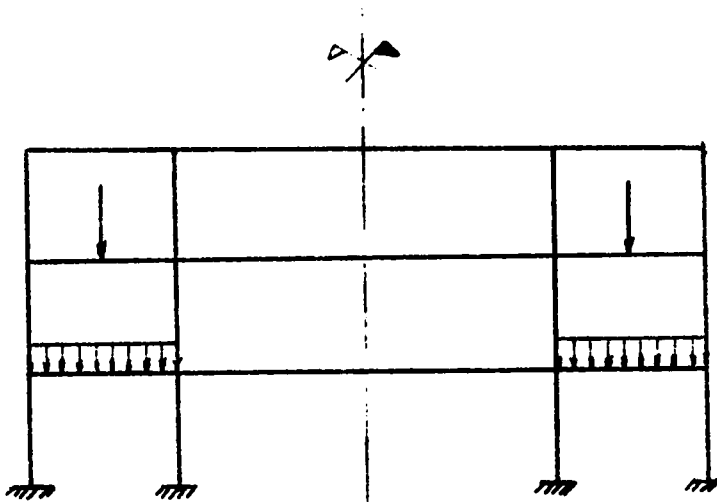
Podemos pues descomponer la estructura en estas dos:

Es como si hubiese un empotramiento rígido en los nudos del eje de simetría.



Nos basta pues resolver una de las dos estructuras para tener inmediatamente resuelta la otra.

El soporte del medio solo trabaja a esfuerzo axial.



CASO B: No existe soporte en el eje de simetría.

En este caso trabajo también, solo con una de las dos mitades de la estructura, utilizando para las barras que ~~se~~ cortan ~~en~~ al eje de simetría:

-La rigidez de la pieza simétrica solicitada simétricamente.

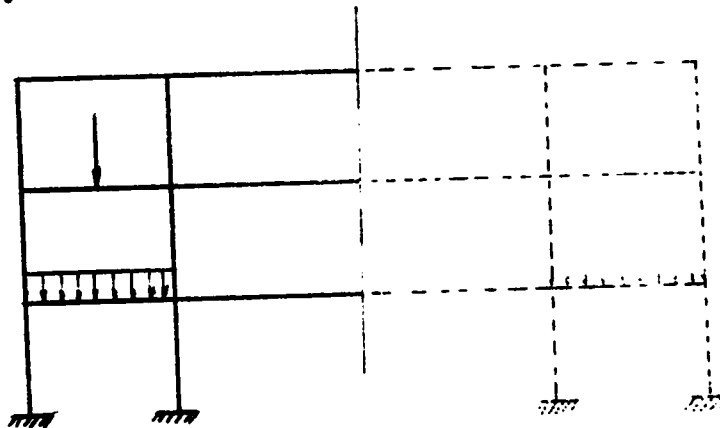
-El momento de empotramiento

perfecto de la viga entera biempotrada.

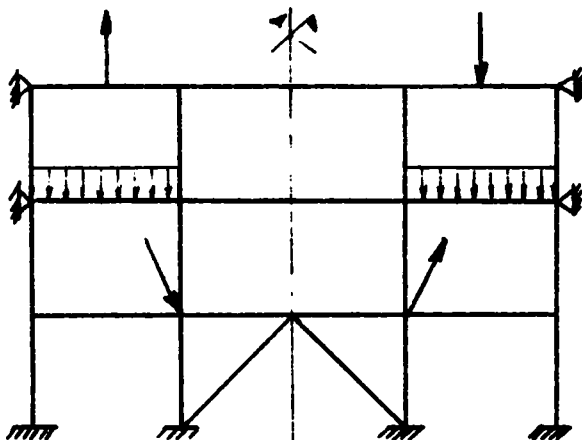
-El factor de transmisión tam-

poco tiene sentido en este caso.

NOTA: Si en una estructura simétrica solicitada simétricamente, aparece en un punto de ella un momento  $m$ , en su simétrico aparece un momento  $-m$  (nos referimos a momento-~~esfuerzo~~ y no a momento flector).



#### VIII.6.6.-Estructura simétrica con antimetría de cargas.



CASO A: No existe soporte en el eje de antimetría.

-Los puntos que están en el eje, se comportan como si en ellos existiese una articulación, ni suben, ni bajan, solo giran.

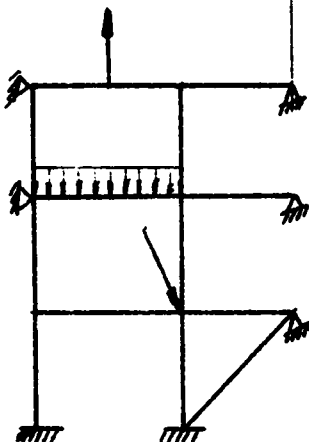
-Trabajamos solo con la mitad de la estructura, utilizando para las barras que cortan al eje de antimetría:

.la rigidez de la pieza simétrica solicitada antsimétricamente

(o la de la viga mitad empotrada articulada).

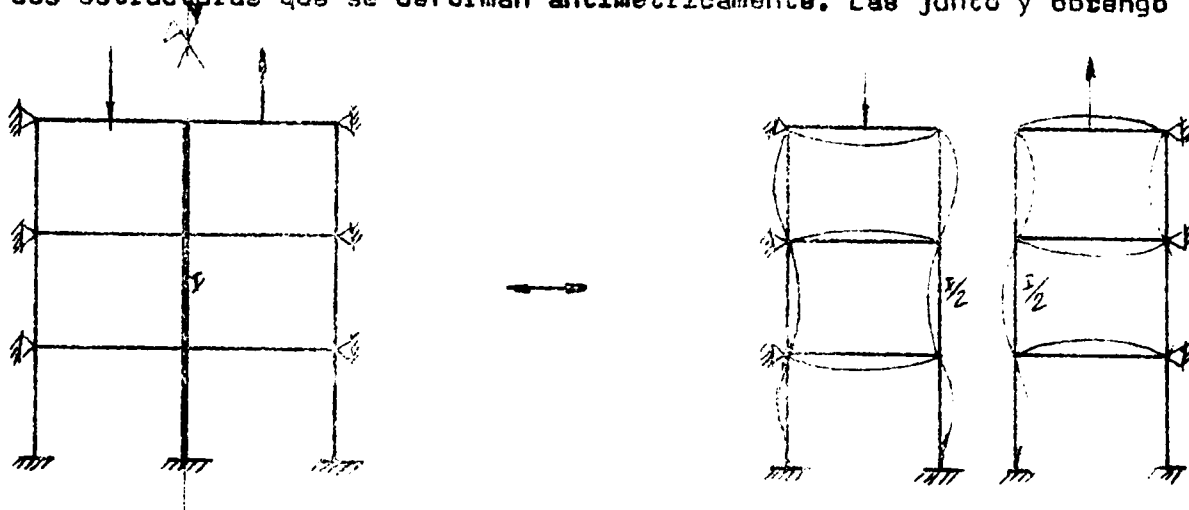
.el momento de empotramiento de la viga entera biempotrada (o el de la viga mitad empotrada articulada).

.el factor de transmisión no tiene sentido en este caso.



CASO B: Existe un soporte en el eje de antimetria.

Si considero la estructura dividida en dos mitades por el eje de antimetria con las cargas correspondientes a cada parte, tengo dos estructuras que se deforman antimetricamente. Las junto y obtengo



la estructura inicial, con un soporte en el eje de inercia doble a la que tenian cada una de las mitades en la parte que va a ser común.

Luego puedo trabajar solo con la mitad de la estructura tomando en los soportes que pasan por el eje de antimetria, la inercia que tenia en la estructura inicial dividida por dos.

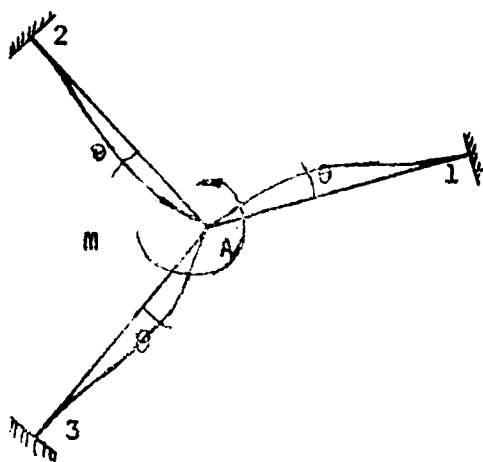
NOTA: Si en una estructura simetrica solicitada antimetricamente, aparece en un punto de ella un momento  $m$ , en su antimétrico aparecerá un momento  $m$  (nos referimos a momentos-fuerza y no a flectores).

#### VIII.6.7.-Descomposición de una estructura simétrica solicitada de cualquier forma en un estado simétrico y uno antimétrico.

La forma de realizarlo, por otra parte muy sencilla, es materia de 2º curso por lo que no la repetimos aquí.

El problema que se plantea es que resulta más comodo, si resolver una estructura doble o dos sencillas superponiendo luego. En cada caso concreto se debe de estudiar esta alternativa, en función del numero de barras (por ejemplo a la hora de entrar en un ordenador, puede ser que la estructura completa no nos quepa y si la mitad), y de si existen o no existen soportes en el eje.

#### VIII.7.-DETERMINACIÓN DEL GIRO DE UN NUDO.



##### Primer procedimiento.

$$\text{Equilibrio: } M = M_{A1} + M_{A2} + M_{A3}.$$

$$\text{Compatibilidad: } \theta = \frac{M_{A1}}{R_{A1}} = \frac{M_{A2}}{R_{A2}} = \frac{M_{A3}}{R_{A3}} = \frac{M}{\sum R}$$

donde por ejemplo,  $M_{A1}$ , es todo el momento que "viene" sobre el extremo A de la barra A1.

(Analogamente para las otras barras).

En una estructura intraslacional cualquiera, si tenemos desarrollado el Cross, lo que "viene" a cada barra es:

$$M^I + M^{III} + M^V + \dots$$

luego para hallar el giro de un nudo (A) nos basta tomar una barra cualquiera (AI) concurrente en él, y dividir la suma anterior por la rigidez de la barra AI en el extremo A:

$$\frac{M^I + M^{III} + \dots}{R_a} = \theta_A$$

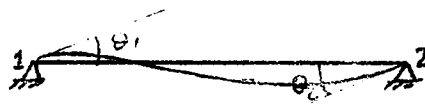
La barra considerada no puede estar articulada en el nudo considerado, pues su giro en este nudo no afecta para nada al resto de las barras en el concurrentes.

## 2º procedimiento.

El procedimiento anterior es muy rápido, pero tiene el inconveniente de que no le podemos aplicar si solo conocemos los momentos finales de Cross.

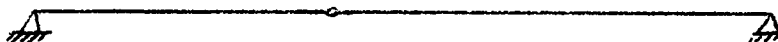
En este caso plantearemos en una de las vigas que concurren en el nudo (Si no se articulan en él), las dos ecuaciones siguientes (una para cada nudo), ver apartado VIII.1:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \hat{M}_1 + R_1 \cdot \theta_1 + \gamma_{12} R_2 \cdot \theta_2 \\ M_2 &= \hat{M}_2 + R_2 \cdot \theta_2 + \gamma_{21} R_1 \cdot \theta_1 \end{aligned} \right\}$$



de donde, resolviendo, obtenemos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

NOTAS: 1) Si tenemos un elemento tal como el de la figura:



lo mejor es considerarle todo el como una barra y obrar en consecuencia (Ver pagina VII.19 y siguientes).

De todas formas con lo que sabemos hasta ahora no podemos proceder de otra forma, puesto que la articulación sufre un desplazamiento, y entonces la estructura ya no sería intraslacional.

2) Si queremos hallar la flecha en el extremo de un voladizo, hay que tener en cuenta la flecha debida al giro del nudo, más la debida a la deformación propia de la viga.



**IX.-LINEAS DE INFLUENCIA DE ESTRUCTURAS RETICULADAS INTRASLACIONALES\***  
 =====

**IX.1.1. INTRODUCCIÓN.**

Lo que se dijo en VI.1 y VI.2 a propósito de las líneas de influencia de estructuras articuladas es válido también aquí. Lo que ocurre es que en este caso las líneas de influencia del momento flector adquieren una importancia que no tenían en las articuladas, como se comprende fácilmente.

Los métodos que estudiaremos son dos:

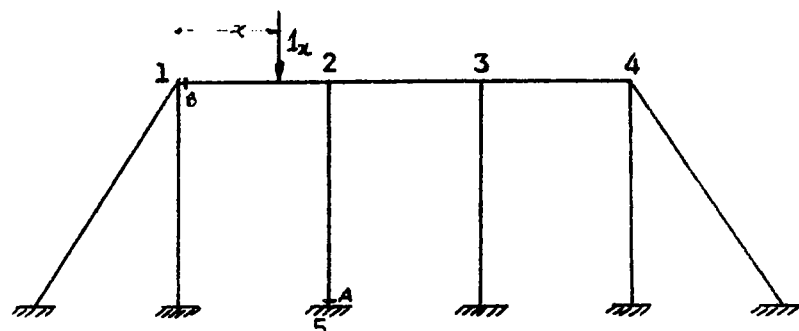
-Método de los momentos 100.

-Y el de la reciprocidad, es decir aplicando el teorema de Maxwell.

**IX.2.-MÉTODO DE LOS MOMENTOS 100.**

Es interesante este método cuando existen simplificaciones en la estructura y no hay demasiadas barras.

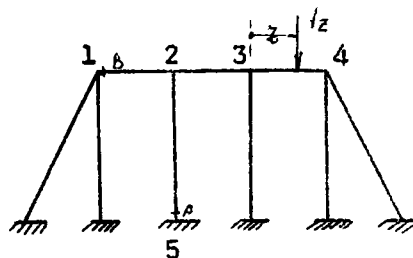
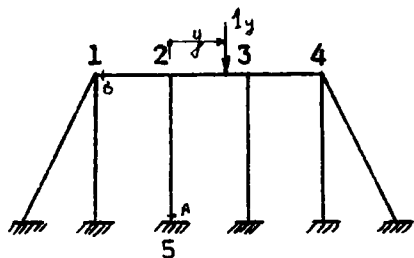
Describamos el método razonando sobre un ejemplo concreto.



Supongamos que queremos hallar la línea de influencia del momento que ejerce el nudo 1 sobre la barra 1-2 (B), y el que ejerce el nudo 5 sobre la barra 5-2 (A); cuando una carga unidad vertical dirigida hacia abajo recorre el dintel 1-2-3-4, en la estructura de la figura.

Consideremos previamente el caso en que la carga unidad está entre el punto 1 y 2. ¿Pero que tenemos?, pues sencillamente una estructura intraslacional sometida a un sistema de cargas (en este caso una), problema que ya sabemos resolver, por ejemplo mediante un Cross, obteniendo el momento ~~absoluto~~ en A y B pedido, en función de la abscisa x.

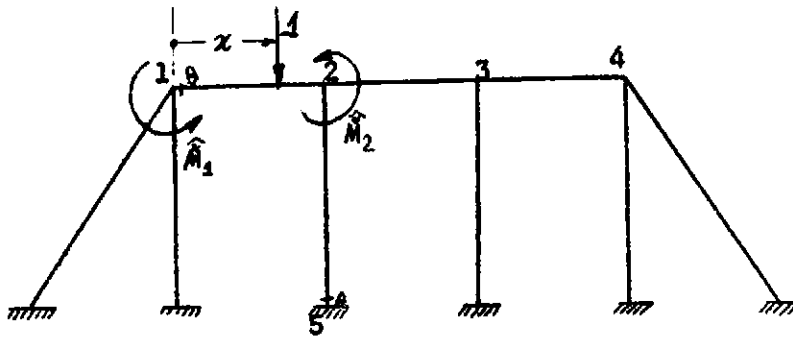
Analogamente ocurre si la carga unidad está entre 2-3 y entre 3-4:



Pero sigamos con el caso en que  $1_x$  está entre 1 y 2, y descompongamos dicho estado en un ESTADO INICIAL (nudos fijos) y un ESTADO MODAL:

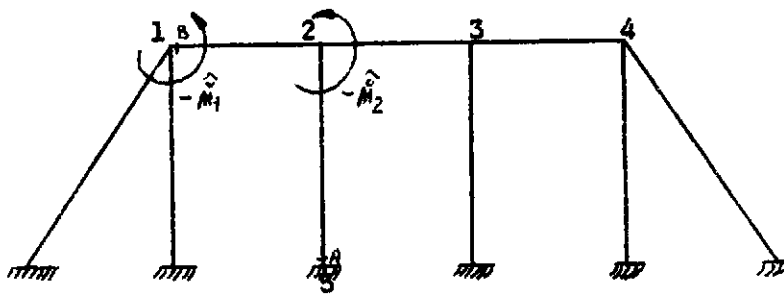


(Trabajamos con valores algebraicos, no absolutos)



ESTADO INICIAL.

+



ESTADO MODAL.

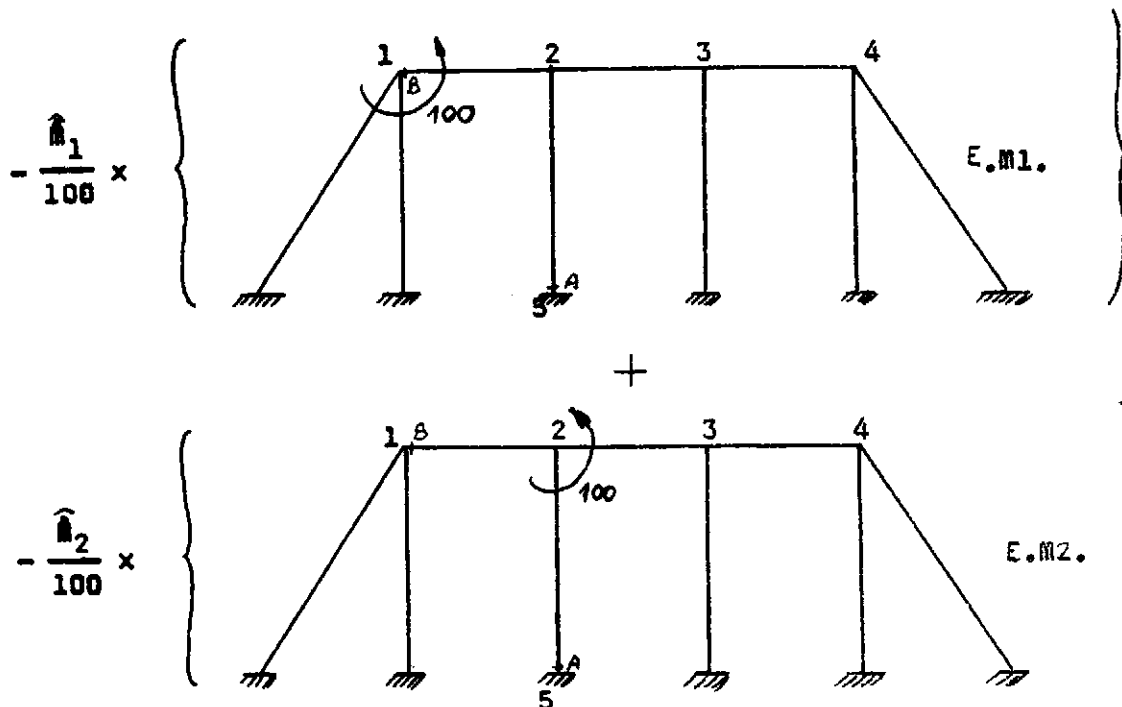
donde  $\hat{M}_1 = f_1(x)$  y  $\hat{M}_2 = f_2(x)$ , son los momentos de empotramiento perfecto de la viga 1-2 con la carga  $1_x$ , los cuales pueden ser deducidos o sacados de una tabla (que es lo más comodo y rápido).

En el caso de una viga de longitud ~~constante~~ (L), y sección constantes:

$$\hat{M}_1 = x \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^2$$

$$\hat{M}_2 = -\frac{x^2}{L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right)$$

Descompongamos ahora el estado Modal:



estados que pueden resolverse mediante un Croas u otro metodo que nos interese, y ya tenemos el fundamento del metodo de los momentos-100.

-Aplico un momento exterior 100 (se toma 100 y no 1, para trabajar con números enteros, que corresponden a dos cifras decimales), a cada nudo de la estructura que esta en el camino de la fuerza unidad, en tantos estados como nudos halla , (es decir en cada estado aplico uno, no todos de golpe).

-Resuelvo dichos estados.

-Tengo dos clases de extremos de viga:

...Los puntos que como el A no estan en el camino de la carga unidad, para los cuales:

$$1_x: \quad M_A = -\frac{\hat{m}_1}{100} M_{A1} - \frac{\hat{m}_2}{100} M_{A2}$$

===== ,

siendo  $M_{A1}$  el momento que el nudo 5 ejerce sobre la barra 5-2 en el estado M1, y  $M_{A2}$  idem en el estado M2.

Analogamente cuando la carga unidad está entre 2-3 y 3-4. (Se obtienen pues 3 ecuaciones en este ejemplo).

...Los puntos que como el B estan en el camino de la carga unidad:

$$1_x: \quad M_B = \hat{m}_1 - \frac{\hat{m}_1}{100} M_{B1} - \frac{\hat{m}_2}{100} M_{B2} = \frac{\hat{m}_1}{100} (100 - M_{B1}) - \frac{\hat{m}_2}{100} M_{B2}$$

== =====

siendo  $M_{B1}$  el momento que ejerce el nudo 1 sobre la barra 1-2 en el E.M1, y  $M_{B2}$  lo mismo para el estado M2.

Para este mismo punto (B), cuando la carga unidad esta entre 2-3 y entre 3-4 ~~mi nudo~~, se comporta como el A, ya que no esta en el recorrido de la carga unidad.

...    ...    ...    ...

Hasta aquí lo unico que hemos hecho es obtener los momentos sobre las cabezas de las barras cuando la carga unidad hace un determinado recorrido. Ahora bien, conocidos estos momentos (que para nada nos importa que vengan en función de una abscisa generica) podemos determinar cualquier otro efecto elastico en cualquier punto de la estructura, ya sea :

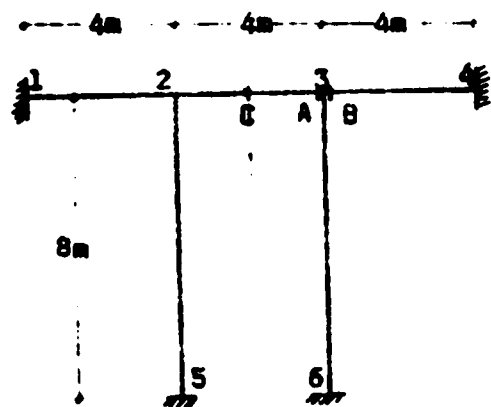
- esfuerzo cortante,
- esfuerzo axial,
- momento flector,
- reacción,
- giros,
- flechas,

teniendo cuidado, si el punto en cuestión está en el recorrido de la carga unidad, pues en este caso hay que superponer a la ley debida a los momentos extremos la debida a la isostatica.

Con el ejemplo siguiente, del apartado siguiente, se aclaran estas cuestiones y se ve la forma practica de proceder.

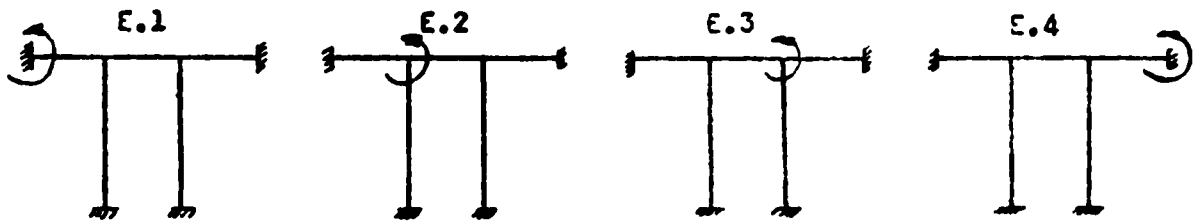


EX.2.EJEMPLO.



Se trata de hallar las siguientes líneas de influencias:  
-del momento flector en A,  
-del esfuerzo cortante en B, y  
-del momento flector en C,  
en la estructura de la figura adjunta, cuando una carga vertical unidad dirigida hacia abajo recorre el cordón superior.  
Todas las vigas son de 40 cmx40 cm.  
.....

Los nudos que se encuentran en el recorrido de la carga unidad son el 1, el 2, el 3 y el 4. En principio, tenemos por tanto que resolvernos los siguientes cuatro estados:



Ahora bien, el estado 1 y el 4, no tienen nada que resolver pues el momento lo absorbe directamente el empotramiento. Y en cuanto al estado 3 lo podemos obtener por antimetría del estado 2.  
Resolvemos el estado 2 mediante un Cross. Tener en cuenta que las vigas son de sección constante e igual entre sí.

E.2

Momen. Exter.	100			0		
NUDO	2			3		
BARRA	2-1	2-5	2-3	3-2	3-6	3-4
Val. pro. Rigidez	2	1	2	2	1	2
Coef. de reparto	0.4	0.2	0.4	0.4	0.2	0.4
Fact. de Transmisi.			0.5	0.5		
$\uparrow$	0	0	0	0	0	0
$M^I$	40	20	40	0	0	0
$M^{II}$	0	0	0	20	0	0
$M^{III}$	0	0	0	-8	-4	-8
$M^{IV}$	0	0	-4	0	0	0
$M^V$	2	0	2	0	0	0
	42	20	38	12	-4	-8

$$m_{1-2}^{(2)} = (42-0) \cdot 0,5 + 0 = 21$$

$$m_{6-3}^{(2)} = (-4-0) \cdot 0,5 + 0 = -2$$

$$m_{2-1}^{(2)} = 42$$

$$m_{3-2}^{(2)} = 12$$

$$m_{2-5}^{(2)} = 20$$

$$m_{3-6}^{(2)} = -4$$

$$m_{5-2}^{(2)} = (20-0) \cdot 0,5 + 0 = 10$$

$$m_{4-3}^{(2)} = (-8-0) \cdot 0,5 + 0 = -4$$

$$m_{2-3}^{(2)} = 38$$

$$m_{3-4}^{(2)} = -8$$

Y deducidos de estos, los momentos sobre las cabezas de las vigas en el estado 3 son:

$$m_{4-3}^{(3)} = 21$$

$$m_{5-2}^{(3)} = -2$$

$$m_{3-4}^{(3)} = 42$$

$$m_{2-3}^{(3)} = 12$$

$$m_{6-3}^{(3)} = 10$$

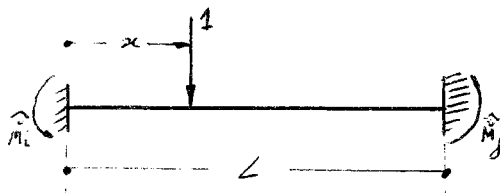
$$m_{1-2}^{(3)} = -4$$

$$m_{3-6}^{(3)} = 20$$

$$m_{2-5}^{(3)} = -4$$

$$m_{3-2}^{(3)} = 38$$

$$m_{2-1}^{(3)} = -8$$



$$\hat{m}_1 = x \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

$$\hat{m}_2 = \frac{x^2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Con estos datos ya podemos pasar a calcular cualquiera de las líneas de influencia pedidas.

#### MOMENTO FLECTOR EN A.

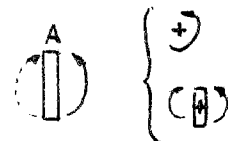
$$m_{fA} = m_{3-2}$$

Cuando la carga unidad esta en 1-2

i=1, j=2.

L=4 mts.

$$m_{3-2} = -\frac{\hat{m}_1}{100} m_{3-2}^{(1)} - \frac{\hat{m}_2}{100} m_{3-2}^{(2)} = -\frac{\hat{m}_2}{100} 12 = -0,12 \hat{m}_2$$



x	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\alpha \hat{m}_1 + \beta \hat{m}_2$	$m_{3-2}$	$m_{fA}$
0	0	0	0	0	0
1	0,5625	-0,1875	0,02	0,02	0,02
2	0,5	-0,5	0,06	0,06	0,06
3	0,1875	-0,5625	0,07	0,07	0,07
4	0	0	0	0	0

$$\alpha = m_{3-2}^{(1)} = 0$$

$$\beta = \frac{m_{3-2}^{(2)}}{100} = -0,12$$

O bien su ecuación:

$$m_{PA} = 0,03 \times^2 \left(1 - \frac{x}{4}\right).$$

Cuando la carga unidad está en 2-3.  
i=2, j=3, L=4 mts.

Como el punto A está en el recorrido de la carga hay que tener en cuenta el momento debido a la isostática, que en este caso concreto, por tratarse de un momento junto a un apoyo, es nulo.

$$\begin{aligned} m_{3-2} &= - \frac{\hat{m}_2}{100} m_{3-2}^{(2)} + \frac{\hat{m}_3}{100} (100 - m_{3-2}^{(3)}) = \\ &= -0,12 \hat{m}_2 + 0,62 \hat{m}_3 \end{aligned}$$

x	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\alpha \hat{m}_2 + \beta \hat{m}_3$	$m_{PA}$
0	0	0	0	0
1	0,5625	- 0,1875	-18,35E-2	-0,1835
2	0,5	- 0,50	-37,00E-2	-0,3700
3	0,1875	- 0,5625	-37,15E-2	-0,3715
4	0	0	0	0

$\alpha = -0,12$

$\beta = 0,62$

O bien su ecuación:

$$m_{PA} = x(1 - \frac{x}{L}) (-0,12 + 0,03x - 0,15x)$$

$$m_{PA} = -x \left(1 - \frac{x}{4}\right) (0,12 + 0,12 x)$$

Cuando la carga unidad está en 3-4.  
i=3, j=4, L=4 mts.

$$\begin{aligned} m_{3-2} &= - \frac{\hat{m}_3}{100} m_{3-2}^{(3)} - \frac{\hat{m}_4}{100} m_{3-2}^{(4)} = \\ &= -0,38 \hat{m}_3 \end{aligned}$$

x	$\hat{m}_3$	$\hat{m}_4$	$\alpha \hat{m}_3 + \beta \hat{m}_4$	$m_{PA}$
0	0	0	0	0
1	0,5625	-0,5625	-0,2140	-0,2140
2	0,5	-0,5	-0,1905	-0,1905
3	0,1875	-0,5625	-0,0712	-0,0712
4	0	0	0	0

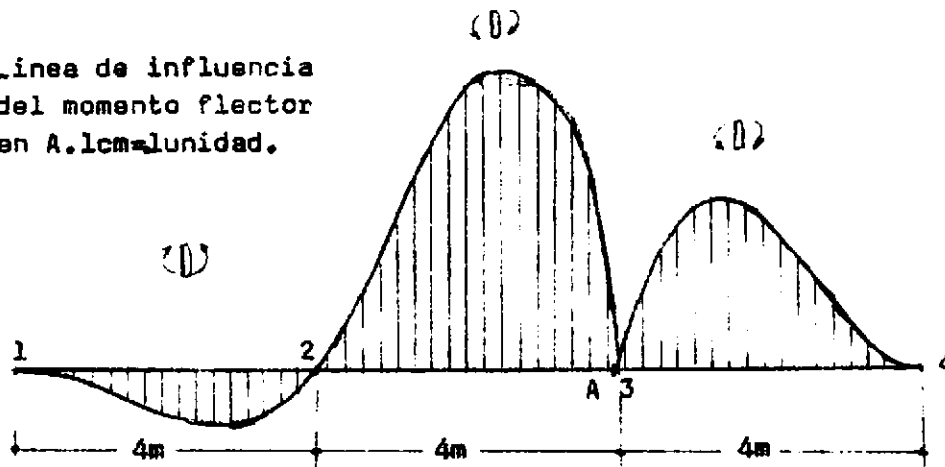
$\alpha = -0,38$

$\beta = 0,00$

O bien su ecuación:

$$m_{FA} = -0,38 \times \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$$

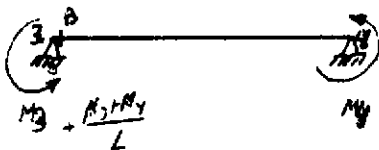
Línea de influencia  
del momento flector  
en A. lcm=unidad.



#### LÍNEA DE INFLUENCIA DEL CORTANTE EN B.

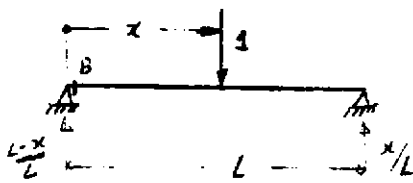


Debido a los momentos extremos:



$$Q_B = -(m_{3-4} + m_{4-3})/L$$

Debido a la isostática (solo cuando la carga unidad está entre 3 y 4).



$$Q_B = -(L-x)/L$$

Cuando la carga unidad está entre 1-2.

$i=1, j=2.$

$$m_{3-4} = -\frac{\hat{m}_1}{100} m_{3-4}^{(1)} - \frac{\hat{m}_2}{100} m_{3-4}^{(2)} = 0,08 \hat{m}_2$$

$$m_{4-3} = -\frac{\hat{m}_1}{100} m_{4-3}^{(1)} - \frac{\hat{m}_2}{100} m_{4-3}^{(2)} = 0,04 \hat{m}_2$$

$$m_{3-4} + m_{4-3} = 0,12 \hat{m}_2$$

x	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\alpha \hat{m}_1 + \beta \hat{m}_2$	$Q_B$
0	0	0	0	0
1	0,5625	-0,1875	-0,0225	0,0056
2	0,5	-0,5	-0,06	0,0150
3	0,1875	-0,5625	-0,0675	0,0169
4	0	0	0	0

$\alpha = 0$

$\beta = 0,12$

O bien su ecuación:

$$Q_B = -\frac{1}{4} 0,12 \frac{-x^2}{4} \left(1 - \frac{x}{4}\right)$$

$$Q_B = 0,0075 x^2 \left(1 - \frac{x}{4}\right)$$

Cuando la carga unidad está en 2-3.

i=2, j=3.

$$m_{3-4} = -\frac{\hat{m}_2}{100} m_{3-4}^{(2)} - \frac{\hat{m}_3}{100} m_{3-4}^{(3)} = 0,08 \hat{m}_2 - 0,42 \hat{m}_3$$

$$m_{4-3} = -\frac{\hat{m}_2}{100} m_{4-3}^{(2)} - \frac{\hat{m}_3}{100} m_{4-3}^{(3)} = 0,04 \hat{m}_2 - 0,21 \hat{m}_3$$

$$m_{3-4} + m_{4-3} = 0,12 \hat{m}_2 - 0,63 \hat{m}_3$$

x	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\alpha \hat{m}_2 + \beta \hat{m}_3$	$Q_B$
0	0	0	0	0
1	0,5625	-0,1875	0,1856	-0,0464
2	0,5	-0,5	0,3750	-0,0938
3	0,1875	-0,5625	0,3769	-0,0942
4	0	0	0	0

$\alpha = 0,12$

$\beta = -0,63$

O bien su ecuación:

$$Q_B = - \frac{1}{4} \times (1 - \frac{x}{4}) (0,12 (1 - \frac{x}{4}) + 0,63 \frac{x}{4}) =$$
$$= - \frac{1}{4} \times (1 - \frac{x}{4}) (0,12 + 0,1275x)$$
$$Q_B = - 0,03 \times (1 - \frac{x}{4}) (1 + 1,0625 x )$$

Cuando la carga unidad esté en 3-4.  
i=3, j=4.

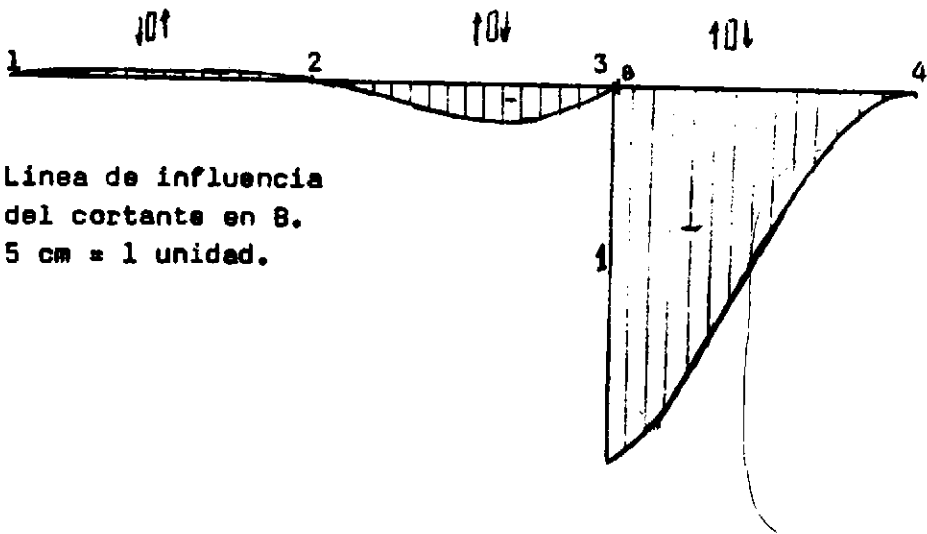
$$m_{3-4} = \frac{\hat{m}_3}{100} (100 - m_{3-4}^{(3)}) - \frac{\hat{m}_4}{100} m_{3-4}^{(4)} = 0,58 \hat{m}_3$$
$$m_{4-3} = - \frac{\hat{m}_3}{100} m_{4-3}^{(3)} + \frac{\hat{m}_4}{100} (100 - m_{4-3}^{(4)}) = -0,21 \hat{m}_3 + \hat{m}_4$$
$$m_{3-4} + m_{4-3} = 0,37 \hat{m}_3 + \hat{m}_4$$

x	$\hat{m}_3$	$\hat{m}_4$	$\alpha \hat{m}_3 + \beta \hat{m}_4$	-m/L	$\frac{x}{4} - 1$	$Q_B$
0	0	0	0	0	-1,	- 1
1	0,5625	-0,1875	0,0206	-0,0052	-0,75	-0,7552
2	0,5	-0,5	-0,3150	0,0788	-0,5	-0,4212
3	0,1875	-0,5625	-0,4931	0,1233	-0,25	-0,1267
4	0	0	0	0	0	0

$\alpha = 0,37$   
 $\beta = 1,00$

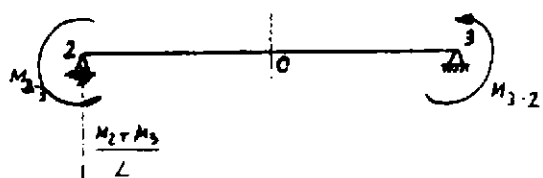
O bien su ecuación:

$$Q_B = - \frac{1}{4} \times (1 - \frac{x}{4}) (0,37 (1 - \frac{x}{4}) - \frac{x}{4}) + \frac{x}{4} - 1 \neq$$
$$Q_B = -0,0925 \times (1 - \frac{x}{4}) (1 - 0,9257 x ) + 0,25 x - 1$$



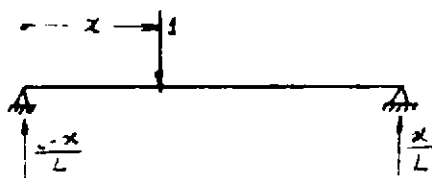
LÍNEA DE INFLUENCIA DEL MOMENTO FLECTOR EN C.

Debido a los momentos externos:



$$m_{FC} = m_{3-2} - \frac{m_2 + m_3}{L} \frac{L}{2} = (m_{3-2} - m_{2-3})/2$$

Debido a la isostática:



$$x \leq L/2 \quad . \quad . \quad . \quad m_{FC} = x/2$$

$$x \geq L/2 \quad . \quad . \quad . \quad m_{FC} = (L - x)/2$$

Cuando la carga unidad está entre 1 y 2.

i=1, j=2.

$$m_{3-2} = -\frac{\hat{m}_1}{100} m_{3-2}^{(1)} - \frac{\hat{m}_2}{100} m_{3-2}^{(2)} = -0,12 \hat{m}_2$$

$$m_{2-3} = -\frac{\hat{m}_1}{100} m_{2-3}^{(1)} - \frac{\hat{m}_2}{100} m_{2-3}^{(2)} = -0,38 \hat{m}_2$$

$$m_{3-2} - m_{2-3} = 0,26 \hat{m}_2$$

x	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\alpha \hat{m}_1 + \beta \hat{m}_2$	$m_{FC}$
0	0	0	0	0
1	0,5625	-0,1875	-0,0488	-0,0244
2	0,5	-0,5	-0,130	-0,065
3	0,1875	-0,5625	-0,1462	-0,0731
4	0	0	0	0

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 0,26$$

O bien su ecuación:

$$m_{FC} = -0,13 \frac{x^2}{4} \left( 1 - \frac{x}{4} \right)$$

$$m_{FC} = -0,0325 x^2 \left( 1 - \frac{x}{4} \right)$$

Cuando la carga unidad está entre 2 y 3.

$i=2, j=3.$

$$m_{3-2} = -\frac{\hat{m}_2}{100} m_{3-2}^{(2)} + \frac{\hat{m}_3}{100} (100 - m_{3-2}^{(3)}) = -0,12 \hat{m}_2 + 0,62 \hat{m}_3$$

$$m_{2-3} = \frac{\hat{m}_2}{100} (100 - m_{2-3}^{(2)}) - \frac{\hat{m}_3}{100} m_{2-3}^{(3)} = 0,62 \hat{m}_2 - 0,12 \hat{m}_3$$

$$m_{3-2} - m_{2-3} = -0,74 \hat{m}_2 + 0,74 \hat{m}_3$$

$x$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\hat{m}_2 = \hat{m}_3$	$m/2$	$\frac{x}{2} / \frac{4-x}{2}$	$m_{FC}$
0	0	0	0	0	0, 0	0
1	0,5625	-0,1875	-0,5550	-0,2775	0,5	0,2225
2	0,5	-0,5	-0,74	-0,3700	1,0	0,6300
3	0,1875	-0,5625	-0,5550	-0,2775	0,5	0,2225
4	0	0	0	0	0	0

$$\alpha = -0,74$$

$$\beta = 0,74$$

O bien su ecuación:

$$m_{FC} = -0,37 \times \left(1 - \frac{x}{4}\right) \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x}{4}\right) + x/2 \quad m_{FC} = -0,37 \times \left(1 - \frac{x}{4}\right) + \frac{x}{2}, \quad x \leq 2 \text{ mts.}$$

$$m_{FC} = -0,37 \times \left(1 - \frac{x}{4}\right) + \frac{4-x}{2}, \quad x \geq 2 \text{ mts.}$$

Cuando la carga unidad está en 3-4.

$i=3, j=4.$

$$m_{3-2} = -\frac{\hat{m}_3}{100} m_{3-2}^{(3)} - \frac{\hat{m}_4}{100} m_{3-2}^{(4)} = -0,38 \hat{m}_3$$

$$m_{2-3} = -\frac{\hat{m}_3}{100} m_{2-3}^{(3)} - \frac{\hat{m}_4}{100} m_{2-3}^{(4)} = -0,12 \hat{m}_3$$

$$m_{3-2} - m_{2-3} = -0,26 \hat{m}_3$$

La ecuación es:

$$m_{FC} = -0,13 \frac{x}{4} (1 - \frac{x}{4})^2$$

$$m_{FC} = -0,0325 \times \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$$

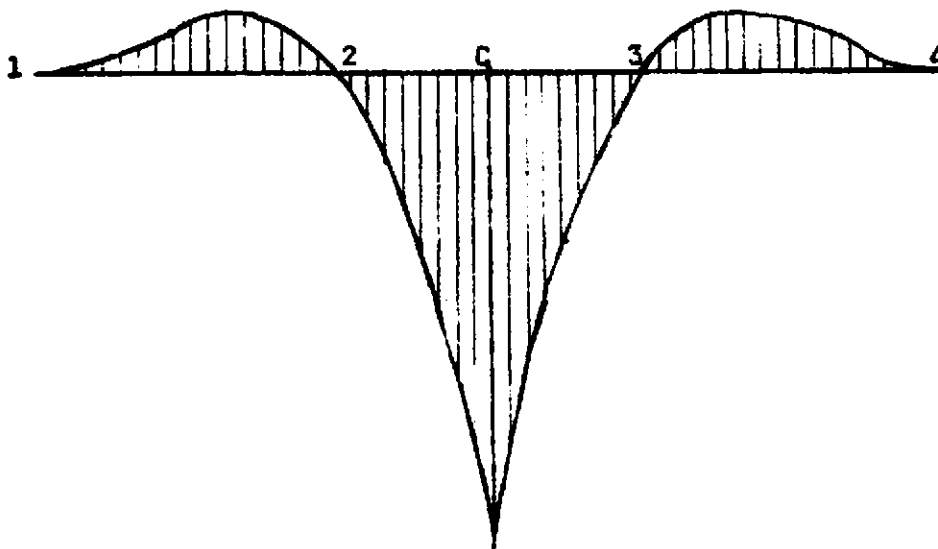


x	$\hat{u}_3$	$\hat{u}_4$	$\alpha \hat{u}_3 + \beta \hat{u}_4$	$m_{FC}$
0	0	0	0	0
1	0,5625	-0,1875	-0,1462	-0,0731
2	0,5	-0,5	-0,130	-0,065
3	0,1875	-0,5625	-0,0488	-0,0244
4	0	0	0	0

$$\alpha = -0,26$$

$$\beta = 0$$

Línea de influencia del  
momento flector en C.  
10 cm = 1 unidad.



### IX.3.-DETERMINACIÓN DE LINEAS DE INBLUENCIA MEDIANTE LA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE LA RECIPROCIDAD O DE MAXWELL.

En general para hallar la línea de influencia de un movimiento es mejor la aplicación de este metodo.

Cuando de una determinada estructura hay que hallar varias líneas de influencia se requiere, en este metodo, un Cross por cada una, mientras que en el metodo de los momentos 100 una vez realizados los Cross iniciales podemos hallar todas las líneas de influencia que queramos.

Para llevar un proceso lógico voy a seguir el siguiente criterio de signos:

-Para fuerzas y flechas:



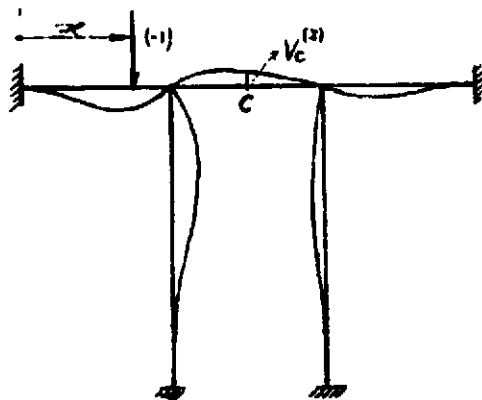
-para giros y momentos:



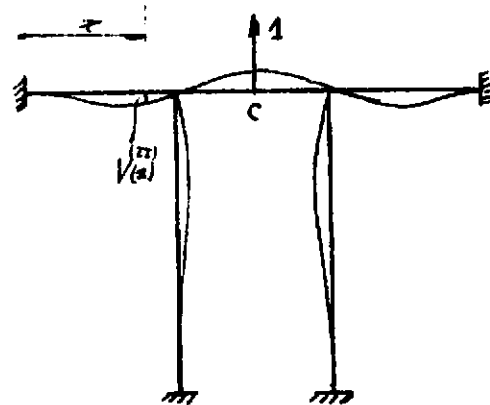
IX.3.1.-Líneas de influencia de una flecha.

A) Sea hallar la línea de influencia de la flecha en el punto C de la estructura del apartado IX.2, cuando una carga unidad vertical dirigida hacia abajo recorre el cordón superior.

Aplicamos reciprocidad:



ESTADO I



ESTADO II (Influjo unidad eficaz con el movimiento cuya línea de influencia queremos hallar)

$$(-1) \cdot V_C^{(II)} = l_{II} \cdot V_C^{(I)}$$

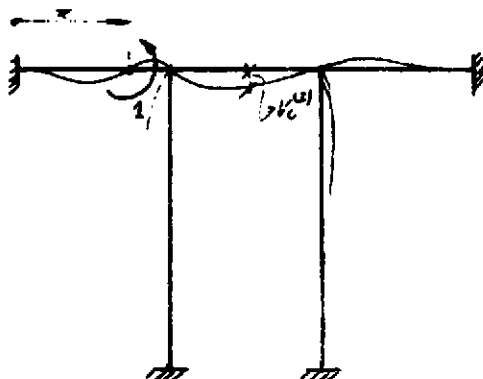
$$V_C^{(I)} = -V_C^{(II)}$$

=====

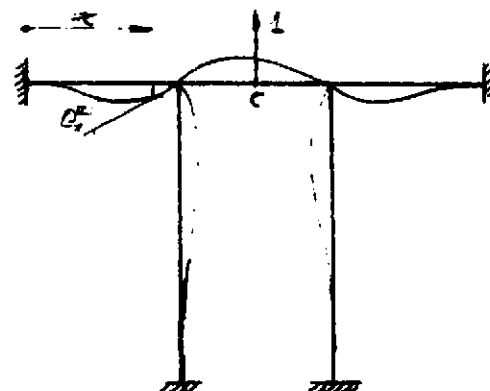
Luego la línea de influencia buscada coincide con la deformada del cordón por el que se pasea la carga unidad, cuando se aplica un influjo unidad eficaz con el movimiento.

B) Sea hallar la línea de influencia de la flecha en el punto C, de la misma estructura que el caso anterior, cuando un momento unidad recorre el cordón superior:

Aplicamos reciprocidad:



ESTADO I



ESTADO II

$$1 \cdot V_C^{(II)} = l_{II} \cdot V_C^{(I)}$$

$$v_C^I = \theta_x^{II}$$

=====

Por tanto la línea de influencia buscada coincide con la ley de giros del cordón por el que se pasea el momento unidad, cuando en la estructura se aplica solo un influjo unidad eficaz con el movimiento que queremos hallar.

NOTA. Una vez calculados los momentos sobre las cabezas de las vigas, por ejemplo mediante un Cross, las deformadas se pueden buscar en unas tablas.

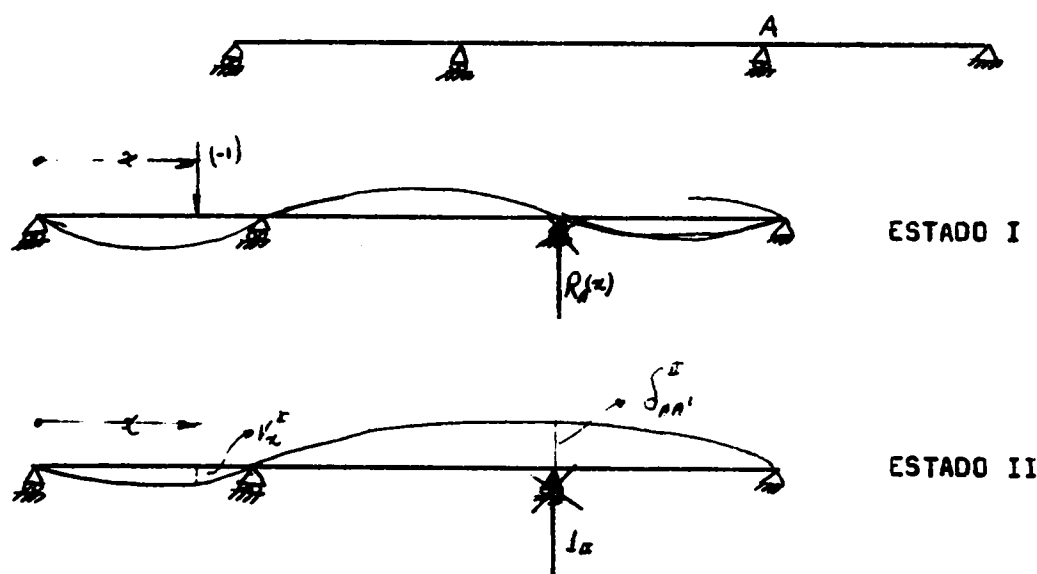
### IX.3.2.-Líneas de influencia de fuerzas y esfuerzos.

#### IX.3.2.1.-Metodo ordinario.

Consiste en liberar la estructura de la coacción cuya línea de influencia queremos hallar en el punto correspondiente.

Como ya vimos al hablar de estructuras articuladas, este método reduce en uno el grado de hiperestaticidad de la estructura, por lo que no se puede aplicar a estructuras isostáticas, a las que hay que aplicar trabajos virtuales.

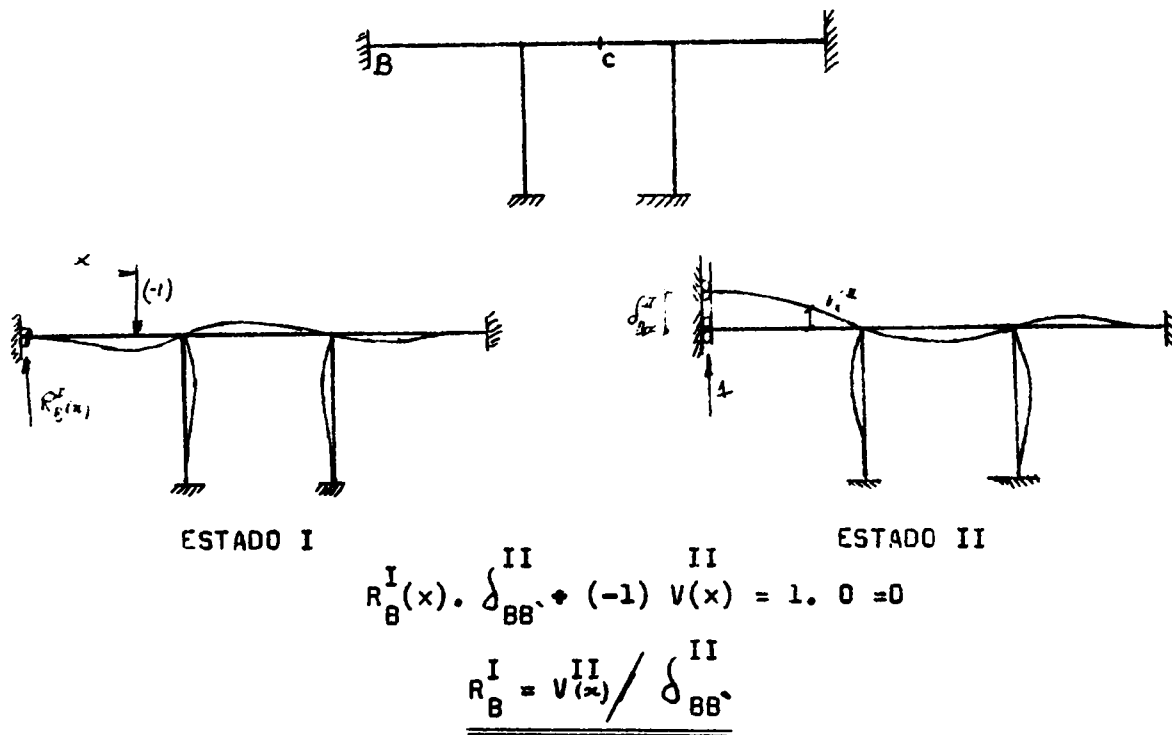
EJEMPLO 1: Línea de influencia en el apoyo A de la viga continua de la figura, cuando una carga unidad vertical dirigida hacia abajo recorre la viga.



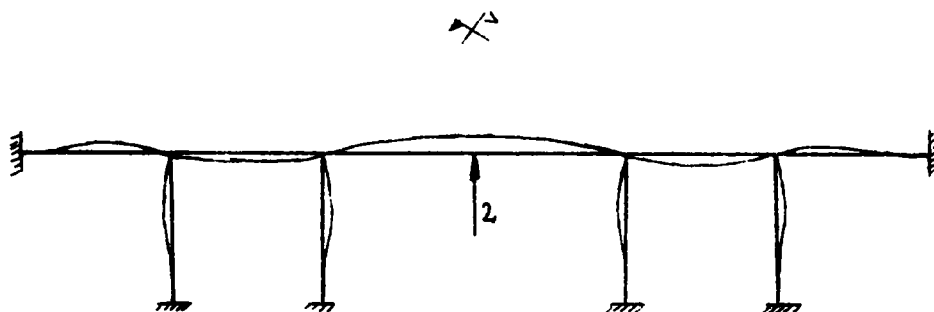
$$(-1) \cdot \theta_x^{II} + R_A^I \cdot \delta_{AA}^{II} = (+1) \cdot 0 = 0$$

$$R_A^I(x) = v_x^{II} / \delta_{AA}^{II}$$

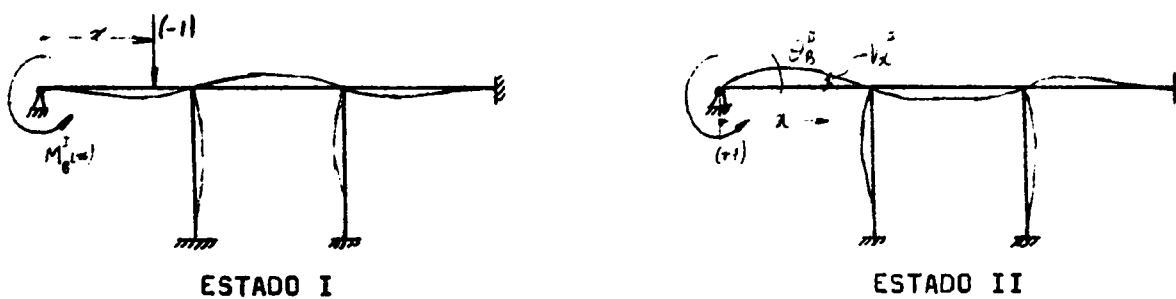
EJEMPLO 2: Línea de influencia de la reacción vertical en B, cuando una carga unidad vertical dirigida hacia abajo recorre el cordón superior.



La observación del estado II, nos hace pensar en el siguiente artificio para su resolución:



**EJEMPLO 3:** Línea de influencia del momento de empotramiento en B, en la misma estructura y en el mismo caso de carga del ejemplo 2.

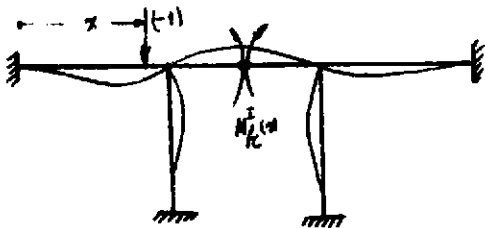


$$M_B^I(x) \theta_B^{II} + (-1) V_C^{II} = (+1) \cdot 0 = 0$$

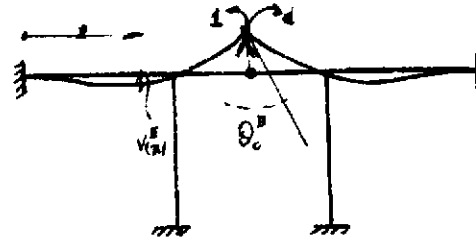
$$M_B^I(x) = V_C^{II} / \theta_B^{II}$$

=====

**EJEMPLO 4:** Línea de influencia del momento flector en C, para la misma estructura y en el mismo caso de carga del ejemplo 2.



ESTADO I



ESTADO II

$$(-1) \cdot V_C^{II} + M_C^I \theta_C^{II} = 0$$

$$M_C^I = V_C^{II} / \theta_C^{II}$$

**CONCLUSIÓN:** Observamos pues que el procedimiento tiene serias complicaciones en numerosos casos (por ejemplo, en este último ejemplo la estructura ya no es intraslacional, aunque se puede resolver como indicamos en la página VIII.21, nota 1). Complicaciones que aumentan a la hora de hallar la línea de influencia de un esfuerzo cortante, en que el mecanismo que se aplica es:

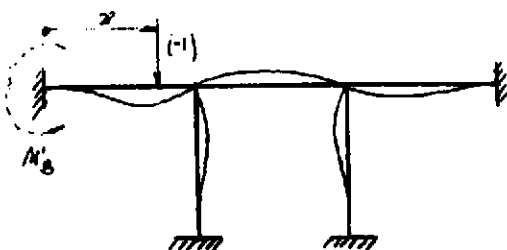


Es conveniente ir pues al siguiente método.

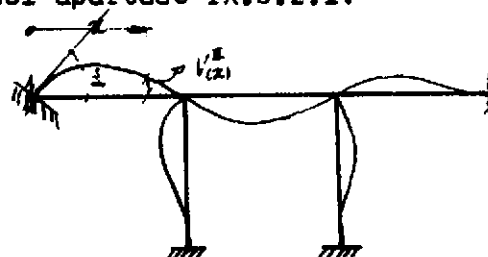
#### IX.3.2.2.-Esquema dual.

La dualidad se refiere respecto al método en que hallábamos la línea de influencia de un movimiento. Allí poníamos un influjo unidad eficaz con el movimiento que queremos hallar, y hallábamos la deformada del cordón por el que se paseaba la fuerza. Aquí ponemos un desplazamiento unidad eficaz con el esfuerzo o la fuerza cuya línea de influencia queremos hallar.

A) Resolvamos el ejemplo 3, del apartado IX.3.2.1:



ESTADO I



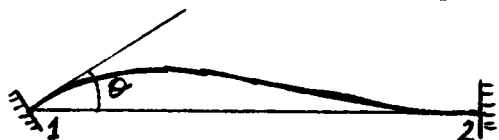
ESTADO II

$$m_B^I(1) + (-1) V(x)^{II} = 0$$

$$m_B^I = V(x)^{II}$$

=====

Veamos pues cuales son los esfuerzos que aparecen en una viga biempotrada al producirse un giro unidad en un apoyo:

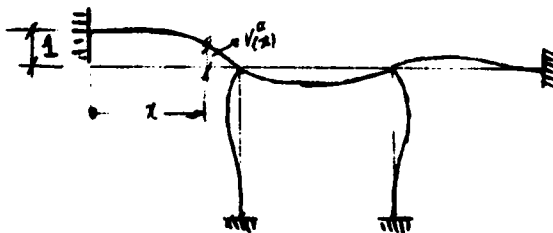
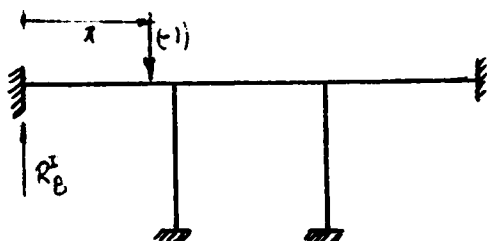


$$\begin{aligned} \hat{m}_1 &= 0 & \hat{m}_2 &= 0 \\ \theta_2 &= 0 & \theta_1 &= \theta \end{aligned}$$

y sustituyendo en las ecuaciones (1) del apartado VIII.1, pag VIII.2:

$$\begin{cases} m_1 = R_1 \cdot \theta \\ m_2 = \delta_{12} \cdot R_1 \cdot \theta \end{cases} \quad \text{c.t.q.s.}$$

B) Resolvamos el ejemplo 2 del apartado IX.3.2.1:



ESTADO I

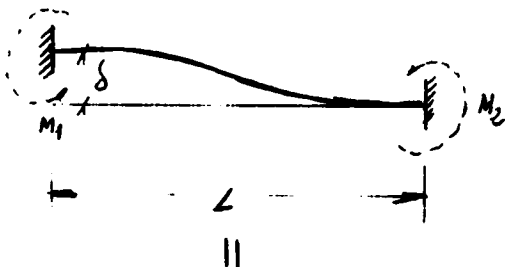
ESTADO II

$$R_B^I \cdot (+1) + (-1) V(x)^{II} = 0$$

$$R_B^I = V(x)^{II}$$

=====

Estudiemos pues los esfuerzos que aparecen al producirse un asiento  $\delta$  en uno de los apoyos de una viga biempotrada:



$$\begin{aligned} m_1 &= 0 & m_2 &= 0 \\ \theta_1 &= \delta / L & \theta_2 &= \delta / L \end{aligned}$$

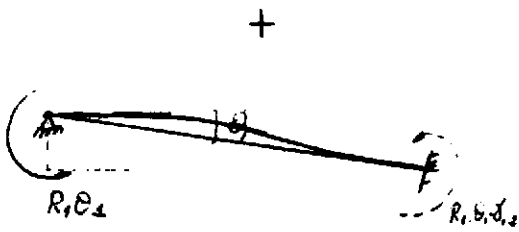
$$\begin{cases} m_1 = \theta_1 \cdot R_1 + \theta_2 \cdot R_2 \cdot \delta_{21} \\ m_2 = \theta_2 \cdot R_2 + \theta_1 \cdot R_1 \cdot \delta_{12} \end{cases}$$

y sustituyendo valores:



(no produce esfuerzos)

+



$$m_1 = \frac{\delta}{L} (R_1 + \delta_{21} \cdot R_2)$$

=====

$$m_2 = \frac{\delta}{L} (R_2 + \delta_{12} \cdot R_1)$$

=====

que para el caso de una viga de sección constante se convierten en:



$$m_1 = m_2 = 6 \frac{E \cdot I}{L^2} \delta$$







